国际数学奥林匹克题库

Canada

Olympic

加拿大数学奥林匹克题解

《加拿大数学奥林匹克题解》编委会 组编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

国际数学奥林匹克题库

加拿大数学奥林匹克题解

《加拿大数学奥林匹克题解》编委会　组编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

加拿大数学奥林匹克题解 /《加拿大数学奥林匹克题解》编委会组编. —杭州：浙江大学出版社，2010.1
ISBN 978-7-308-07235-9

Ⅰ.加… Ⅱ.加… Ⅲ.数学课—高中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 225844 号

加拿大数学奥林匹克题解

《加拿大数学奥林匹克题解》编委会 组编

责任编辑 杨晓鸣
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(网址：http://www.zjupress.com)
排 版 杭州求是图文制作有限公司
印 刷 德清县第二印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 9.5
字 数 195 千字
版 印 次 2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-07235-9
定 价 16.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

国际数学奥林匹克与奥林匹克数学(代序)

数学是锻炼思维的体操,以数学为内容的竞赛已有悠久的历史.在公元16世纪意大利的Tartalia和Cardano曾以解一元三次方程为内容进行过激烈的竞赛.在9世纪,法国科学院等也曾以悬赏的形式征求对数学难题的解答,通过有奖比赛而得到重要的数学发现.

国际数学奥林匹克的权威人士认为,以激发数学才能和引起数学兴趣为目的,中学生自愿参加的数学竞赛,是从匈牙利开始的.

1894年,著名数学家、物理学家L. Eötrös男爵就任匈牙利文化大臣.从这一年起,便开始了为选拔有数学才能的学生的国家考试.开始命名为Eötrös竞赛,后来又以对这一竞赛做出了贡献的J. Kurschak的名字命名,这一竞赛对匈牙利的数学发展起了很重要的作用.后来很多有成就的数学家都曾是这一竞赛的优胜者,例如:1897年的优胜者利波特·费叶尔,在傅立叶级数的可积性理论方面做出了许多出色的工作.1898年的优胜者忒奥多耳·冯·卡门是著名的应用力学家和工程师,对航空和航天技术的发展有过卓越的贡献.1903年的优胜者阿尔伏瑞德·哈尔提出了哈尔测度.马赛尔·黎斯是1904年的优胜者,在泛函分析中提出黎斯凸性定理.而1912年的优胜者嘎波尔·基格,他和波利亚合著的《分析中的定理和问题》至今仍享有盛名.

继匈牙利之后,罗马尼亚于1902年由《数学杂志》组织过数学竞赛.在以后的30年中再没有其他国家系统举办过重大的类似活动,直到匈牙利数学竞赛造就的大师们纷纷登台的时候,欧洲其他国家才睁开惊奇的目光,产生了浓厚的兴趣,并争相效仿.

1934年,前苏联在列宁格勒(今圣彼得堡)大学举办中学生数学奥林匹克,首次将中学生的数学竞赛与体育竞赛的奥林匹克相提并论,把这种活动命名为“数学奥林匹克”.

1949年,保加利亚举办了数学竞赛.

1950年,波兰举办了数学竞赛.

1951年,捷克斯洛伐克举办了数学竞赛.

1956年,中国举办了数学竞赛.

1958年,印度举办了数学竞赛.

此后还有前东德、瑞典(1961)、越南、前南斯拉夫、荷兰、古巴、意大利(1962)、蒙古、卢森堡(1963)、西班牙(1964)、英国、芬兰、阿根廷、比利时(1965)、以色列(1968)、加拿

大、希腊(1969)、前西德(1970)、澳大利亚(1971)、美国(1972)等国举办了数学竞赛.

事实表明,20 世纪 50 年代以来,世界各地的这股举办中学生数学竞赛的热潮,它既为国际数学奥林匹克(IMO)的诞生准备了条件,又为世界数学奥林匹克的发展提供了动力.

1956 年,经罗马尼亚罗曼教授的积极活动,东欧国家正式确定了开展国际数学奥林匹克竞赛的计划.并在 1959 年 7 月在罗马尼亚古都布拉索举行了第一届国际数学奥林匹克竞赛.保加利亚、捷克、匈牙利、波兰和罗马尼亚各派出了由 8 名学生组成的代表队,前苏联(实际是莫斯科)派出了 4 名学生组成的代表队.以后几年,参赛的国家并未增多.在 1963 年和 1964 年,南斯拉夫和蒙古先后加入,1965 年芬兰加入,1967 年法国、英国、意大利和瑞典也参加进来.从此参加的国家逐渐增多.1971 年共有 34 个队,以后逐年发展,2008 年共有 103 个国家及地区的 549 名选手参加了第 49 届 IMO.

随着世界各地各级各类数学竞赛活动的蓬勃开展,对数学奥林匹克竞赛的试题的研究也悄然兴起.国际数学奥林匹克的发展使得竞赛的试题也形成一定的规范:它不再限定在各国高中数学的范围,而更多的是一般中学不怎么涉及的领域,如初等数论、组合论、平面几何、不等式等方面.而且试题的难度不在于了解和解决试题所需要的数学知识的多少,而在于对数学本质的洞察力以及是否具有创造力和数学的机智,试题无模式可套,要求学生探索思考,寻找规律.

由于 IMO 试题的上述特点,有人认为 IMO 试题代表的是一种特殊的数学,可以称为“奥林匹克数学”.

对于数学奥林匹克活动而言,其中最吸引人的,无疑就是那一道道闪耀着数学智慧,散发着数学美的试题.

数学大师华罗庚教授曾经说过:“出题比做题要难,题目要出得妙,出得好,要测得出水平.一次数学竞赛成功与否,主要取决于命题.”

基于数学竞赛试题的重要作用,对竞赛试题的研究和分析就成为一项重要的工作.为加强交流学习,开阔视野,给数学奥林匹克爱好者提供学习的源泉,我们特组织编写了“国际数学奥林匹克题库”系列丛书.

“国际数学奥林匹克题库”汇集了国内外重大数学竞赛的试题和解答.这些竞赛试题构思独特,新颖别致,灵活深邃,内容广,内涵深.解这些题不仅需要扎实的基础知识和基本技能,也需要灵活的思维和坚强的毅力.因此,对于有志于参加数学竞赛的同学来说,本丛书中的问题是不可或缺的训练材料.

“国际数学奥林匹克题库”的编写也是对国际数学竞赛资料的一次大整理,可作为各数学竞赛老师的一份重要资料,作为数学爱好者了解数学竞赛的一个窗口.

丛书的编写过程中,我们参考了一些国内外的资料,在此对这些资料的作者表示感谢.

本丛书篇幅较大,内容庞杂.虽然作者仔细认真地核查多遍,但囿于我们的水平,不当乃至错误之处恐难避免,敬请读者不吝指正.请将您的意见发到 sxjszcbjb@163.com.或至网站:http://www.jsmaths.com 留言.

编 者

2010 年 1 月于苏州

数学奥林匹克在加拿大

加拿大数学奥林匹克是从1969年开始的，每年举行一届，到2009年已举办了41届，前四届每次竞赛有十个题目，后来减至七八个题目，从第十二届以后，每届都是五个题目.

近年来，加拿大数学奥林匹克每年均在三月下旬举行，考试时间为3.5小时.

本书收集了第22～41届加拿大数学奥林匹克(1990－2009)的试题和解答，并在附录中给出了第1～21届加拿大数学奥林匹克(1969－1989)的试题.

加拿大从1981年开始参加国际数学奥林匹克(IMO)，到2008年为止，他们参加IMO比赛28次，共得金牌16枚，银牌37枚，铜牌66枚，荣誉奖16个.他们的团体成绩多在第10－20名之间，最好的一次是第七名(1981年).加拿大在国际数学奥林匹克竞赛中的具体成绩参见附录2.

本书中的一部分试题来自加拿大数学奥林匹克的官方网站，一部分来自历年国际数学奥林匹克期间的领队交流资料，还有一部分来自国内一些期刊杂志.

本书中的解答一是来源于领队交流资料中的官方解答，二是来源于作者和作者辅导的学生的解答，还有一些来源于国内一些期刊杂志中发表的解答.在此，对这些资料的提供者表示深深地谢意.

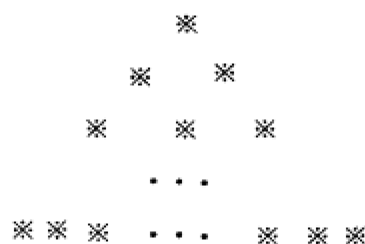
目　录

一、加拿大数学奥林匹克(1990—2009)试题

第 22 届加拿大数学奥林匹克(1990)

1 有 $n(n\geqslant 2)$ 名选手参加一项为期 k 天的比赛，在每天的比赛中，选手可能得到的分数为 $1,2,3,\cdots,n$，且没有两个人的得分相同，当 k 天比赛结束时，发现每名选手的总分都是 26 分. 试确定数对 (n,k) 的所有可能情况.

2 如图，将 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个不同的数随机排列成一个三角数阵，设 M_k 是从上往下数第 k 行中的最大数，试求 $M_1<M_2<\cdots<M_n$ 的概率.



1990.2 图

3 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 X，由 X 向 AB、BC、CD、DA 分别作垂线，垂足为 A'、B'、C'、D'.

求证：$A'B'+C'D'=A'D'+B'C'$.

4 一个质点在 x 轴上的运动速度最大为 2 米/秒，在平面其他地方的运动速度最大为 1 米/秒. 试求该质点从原点出发在 1 秒钟内所能到达区域的边界曲线.

5 已知定义在正整数集上的函数 f 满足：

$$f(1)=1,f(2)=2,$$
$$f(n+2)=f(n+2-f(n+1))+f(n+1-f(n))(n\geqslant 1).$$

(1)求证：$0\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 1$，并且当 $f(n)$ 为奇数时，$f(n+1)=f(n)+1$；

(2)试求适合 $f(n)=2^{10}+1$ 的所有 n 的值，并证明你的结论.

第23届加拿大数学奥林匹克(1991)

1 证明方程

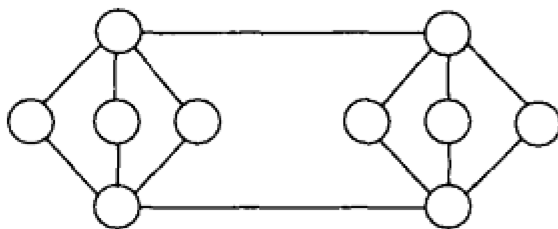
$$x^2+y^5=z^3$$

有无穷多组整数解,其中 $xyz\neq0$.

2 n 为固定的正整数,求出所有具有以下性质的正整数的和:在二进制中,这个数恰有 $2n$ 个数字,其中 n 个 1,n 个 0(首位数字不能为 0).

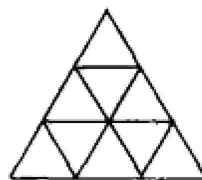
3 在平面上,设 C 是一个圆,P 是一给定的点,过 P 作直线交 C 于 A、B 两点.证明:所有弦 AB 的中点在一个圆上.

4 从数集{0,1,2,…,14}中选出不同的数,填入下图中的 10 个小圆中,使得由线段连结的两个数之差的绝对值均不相同.这可能吗?请证明你的结论.



1991.4 图

5 如图,大三角形的边长为 3,由图中过各交点的直线所成的平行四边形的个数 $f(3)=15$.求边长为 n 的三角形中相应的平行四边形的个数$f(n)$.



1991.5 图

第 24 届加拿大数学奥林匹克(1992)

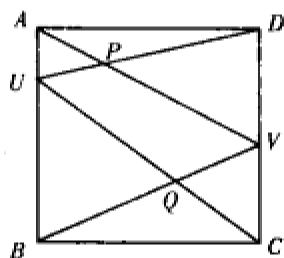
1 证明:前 n 个正整数的乘积能被它们的和整除的充要条件是:$n+1$ 不是一个奇素数.

2 已知 $x,y,z>0$,证明不等式

$$x(x-z)^2+y(y-z)^2 \geqslant (x-z)(y-z)(x+y-z).$$

并确定等号何时成立.

3 如图所示,$ABCD$ 为正方形,U、V 分别是边 AB、CD 内部的点.确定使四边形 $PUQV$ 面积为最大时,U、V 的所有可能情况.



1992.3 图

4 解方程

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3.$$

5 一副牌有 $2n+1$ 张,其中一张"王"和 $1,2,\cdots,n$ 各两张.把这 $2n+1$ 张牌排成一行,使得"王"在正中间,且对每个 k,$1\leqslant k\leqslant n$,两张 k 之间恰有 $k-1$ 张牌.当 $n\leqslant 10$ 时,对怎样的 n,上述安排是可能的,对怎样的 n,上述安排是不可能的?

第25届加拿大数学奥林匹克(1993)

1 一个三角形的3条边长及一条高是4个连续的正整数，且这条高将三角形分成的两个直角三角形的边长均为整数.求这个三角形的三边长，并证明这是唯一的.

2 证明：实数x是有理数的充要条件是：能从数列$x, x+1, x+2, \cdots$中选出3个不同的项，组成等比数列.

3 $\triangle ABC$中，AC边上的中线BD和AB边上的中线CE相互垂直，求证：$\cot B+\cot C \geqslant \frac{2}{3}$.

4 若干个学校参加网球比赛，同一学校的选手相互不比赛，每两个学校的每两名选手之间都要比赛一场.在两个男孩或两个女孩之间进行的比赛称为单打，一个男孩和一个女孩之间的比赛称为混合单打.男孩的人数与女孩的人数至多相差1，单打的场数和混合单打的场数也至多相差1.问有奇数个选手的学校至多有几个？

5 数列$y_1, y_2, y_3, \cdots$满足条件$y_1=1$，对于$k>0$，有

$$y_{2k}=\begin{cases}2y_k, & \text{若 } k \text{ 为偶数}\\ 2y_k+1, & \text{若 } k \text{ 为奇数}\end{cases}$$

$$y_{2k+1}=\begin{cases}2y_k, & \text{若 } k \text{ 为奇数}\\ 2y_k+1, & \text{若 } k \text{ 为偶数}\end{cases}$$

证明：每个自然数恰在数列$y_1, y_2, y_3, \cdots$中出现一次.

第 26 届加拿大数学奥林匹克(1994)

1 求和：$\sum\limits_{n=1}^{1994}(-1)^n\dfrac{n^2+n+1}{n!}$.

2 求证：$\sqrt{2}-1$ 的每个正整数次幂都具有$\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$的形式，其中 m 是某个正整数(例如$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}$).

3 25 个人围一圆桌而坐，每小时进行一轮投票. 每人必须投“赞成票”或“反对票”. 每个人都按下述规则行事：在第 n 轮投票时，如果他和相邻的一人投同样的票，则在第 $n+1$ 轮投票时，他投与第 n 轮一样的票. 在第 n 轮投票时，如果他投的票与相邻的两人都不一样，则在第 $n+1$ 轮投和第 n 轮不同的票. 求证：不论在第一轮投票时，各人投了什么票，总有一个时刻，从这时刻起，每个人在每一轮中投同样的票.

4 AB 是圆 Ω 的直径，P 为不在直线 AB 上的一点. 直线 AP 与 Ω 的交点为 A 和 U，直线 PB 与 Ω 的交点为 B 和 V(注意，在切线的情况下可能有 $A=U$ 或 $B=V$，且若 P 在圆上，则 $P=U=V$). 设 $|PU|=s|PA|$，$|PV|=t|PB|$，s,t 为非负实数，用 s,t 表示 $\angle APB$ 的余弦值.

5 锐角三角形 ABC 中，AD 是 BC 边上的高，H 是线段 AD 内任一点，BH 和 CH 的延长线分别交 AC、AB 于 E 和 F，求证：$\angle EDH=\angle FDH$.

第 27 届加拿大数学奥林匹克(1995)

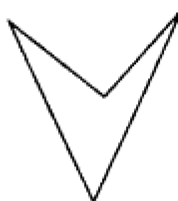
1 设 $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$,计算和

$$f(\frac{1}{1996})+f(\frac{2}{1996})+\cdots+f(\frac{1995}{1996}).$$

2 已知 a,b,c 为正实数,求证:

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

3 如果一个四边形任意一对边不相交,且有一个内角大于 180°,那么我们就称它为“镖形”(如图所示).设 C 是一个凸 s 边形,将 C 划分成 q 个四边形,任意两个四边形不重叠(也无空隙),设其中有 b 个“镖形”,证明:$q\geqslant b+\frac{s-2}{2}$.



1995.3 图

4 设 n 是一个固定的正整数,证明:对任何非负整数 k,下述不定方程

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=y^{3k+2}$$

有无穷多个正整数解$(x_1,x_2,\cdots,x_n;y)$.

5 设 u 为区间(0,1)内一实参数,定义

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant u,\\ 1-(\sqrt{ux}+\sqrt{(1-u)(1-x)})^2 & u\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

数列$\{u_n\}$如下递归定义:

$$u_1=f(1),u_n=f(u_{n-1})(n>1).$$

求证:一定存在正整数 k,使得 $u_k=0$.

第 28 届加拿大数学奥林匹克(1996)

1 如果 α,β,γ 是方程 $x^3-x-1=0$ 的根,求 $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ 的值.

2 求方程组

$$\begin{cases}\frac{4x^2}{1+4x^2}=y,\\ \frac{4y^2}{1+4y^2}=z,\\ \frac{4z^2}{1+4z^2}=x,\end{cases}$$

的所有实数解,并证明你的结论.

3 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正整数 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列. 设 $f(n)$ 是下述排列的数目,它们满足条件:

(ⅰ) $a_1=1$;

(ⅱ) $|a_i-a_{i+1}|\leqslant 2, i=1,2,\cdots,n-1$,

试问 $f(1996)$ 能否被 3 整除.

4 已知等腰 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle B$ 的平分线与 AC 交于 D,且 $BC=BD+AD$,求 $\angle A$.

5 设 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 是给定的 m 个正有理数,且 $\sum_{k=1}^{m} r_k=1$. 对任意正整数 n,定义

$$f(n)=n-\sum_{k=1}^{m}[r_k n].$$

求 $f(n)$ 的最大值和最小值.

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

第29届加拿大数学奥林匹克(1997)

1 有多少对正整数 x,y 满足 $x\leqslant y$ 并且最大公约数 $(x,y)=5!$,最小公倍数 $[x,y]=50!$?

2 闭区间 $A=[0,50]$ 是有限个闭区间的并集,这些区间的长度均为1,证明:可以从中去掉一些闭区间,使得剩下的闭区间互不相交(即交集为空集),并且总长度 $\geqslant 25$.

3 求证:$\frac{1}{1999}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$.

4 已知平行四边形 $ABCD$ 内一点 O 满足 $\angle AOB+\angle COD=180°$,求证:$\angle OBC=\angle ODC$.

5 将和式 $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{k^3+9k^2+26k+24}$ 写成 $\frac{p(n)}{q(n)}$ 的形式,这里 $p(n),q(n)$ 是 n 的整系数多项式.

第 30 届加拿大数学奥林匹克(1998)

1 求满足下面方程的实数 a:

$$\left[\frac{a}{2}\right]+\left[\frac{a}{3}\right]+\left[\frac{a}{5}\right]=a.$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

2 在实数范围内解方程

$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

3 已知自然数 $n\geqslant 2$,求证:

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

4 在三角形 ABC 中,$\angle BAC=40°$,$\angle ABC=60°$,D 和 E 分别是边 AC 和 AB 上的点,使得$\angle CBD=40°$,$\angle BCE=70°$,F 是直线 BD 和 CE 的交点. 证明:直线 AF 和直线 BC 垂直.

5 设 m 是一个正整数,数列$\{a_n\}$定义为:

$$a_0=0,a_1=m,a_{n+1}=m^2a_n-a_{n-1},n\geqslant 1.$$

证明:一个有序非负整数对(a,b)(其中 $a<b$)是方程$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2$ 的解的充分必要条件是(a,b)具有(a_n,a_{n+1})的形式,其中 $n\geqslant 0$.

第31届加拿大数学奥林匹克(1999)

1 求方程 $4x^2-40[x]+51=0$ 的所有实数解.

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

2 已知正三角形 ABC 的高为1,一个半径为1且圆心与 C 在 AB 同侧的圆沿线段 AB 滚动.

证明:该圆在三角形 ABC 内的弧长为定值.

3 试求所有满足方程 $n=(d(n))^2$ 的正整数 n,这里 $d(n)$ 表示 n 的正因数的个数.

4 已知 $\{a_1,a_2,\cdots,a_8\}$ 为集合 $S=\{1,2,\cdots,17\}$ 的一个8元子集.

(i)证明:存在正整数 k,使得方程 $a_i-a_j=k(1\leqslant i,j\leqslant 8)$ 至少有三组不同的解;

(ii)给出一个7元子集,使得对任意正整数 k,方程 $a_i-a_j=k$ 均不存在三组不同的解.

5 非负实数 x,y,z 满足 $x+y+z=1$,求证:

$$x^2y+y^2z+z^2x\leqslant\frac{4}{27},$$

并确定等号成立的条件.

第 32 届加拿大数学奥林匹克(2000)

1　中午 12:00,Anne,Beth 和 Carmen 从同一地点沿着 300 米长的环形跑道跑步.每人匀速地在无限的时间内以两种可能的方向奔跑.证明:如果 Anne 的速度不同于其他两人,那么在以后某一时刻,Anne 与其他两人至少保持 100 米远的距离(这里"距离"是以离二者较近的弧长计算的)

2　数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 是整数 1901,1902,…2000 的一个排列.定义部分和数列

$$S_1=a_1,S_2=a_1+a_2,\cdots,S_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}.$$

若数列$\{S_n\}$中每一项 $S_i(1\leqslant i\leqslant 100)$均不被 3 整除,则满足条件的数列$\{a_n\}$有多少个?

3　设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_{2000})$是一个整数数列,其中 $a_i\in[-1000,1000]$.若 $a_1+a_2+\cdots+a_{2000}=1$,求证:存在 A 的一个非空子数列,其和为 0.

4　凸四边形 $ABCD$ 满足

$$\angle CBD=2\angle ADB,\angle ABD=2\angle CDB,AB=CB.$$

求证:$AD=CD$.

5　已知实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 满足

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{100}\geqslant 0,$$
$$a_1+a_2\leqslant 100,$$
$$a_3+a_4+\cdots+a_{100}\leqslant 100.$$

求 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2$ 的最大值,并求出达到最大值时的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$.

第 33 届加拿大数学奥林匹克(2001)

1 给定整系数二次函数 $f(x)$，满足以下条件：

(1) $f(x)$ 的各系数之和为素数；

(2) 方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的正整数解；

(3) 存在正整数 t，使得 $f(t)=-55$.

(ⅰ) 求证：方程 $f(x)$ 的较小根为 2；

(ⅱ) 求方程 $f(x)=0$ 的较大根.

2 将 -10 到 10 填写到如下图所示的方格中，每个方格均被染成红色或白色，红色方格中的数字之和为 n，莫林把一个代币放在方格 0 上，她扔硬币 10 次，每次扔出人头，就把代币向右移动一格，扔出字，就把代币向左移动一格. 最后代币落在红色方格上的概率为有理数 $\frac{a}{b}$ (a,b 为正整数，$(a,b)=1$[❶]，且 $a+b=2001$). 求 n 的最大可能值.

−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

3 $\triangle ABC$ 中，$AC>AB$，P 是 BC 的垂直平分线和 $\angle A$ 的角平分线的交点，X 是 AB 延长线上的点，Y 是 AC 上的点，并且 $PX\perp AB$，$PY\perp AC$，XY 和 BC 交于点 Z，求 $\frac{BZ}{ZC}$ 的值.

4 n 是正整数，现有一矩阵，其各元素均为正整数，对这个矩阵可作以下两种操作：

(a) 将某一行的元素都乘以 n；

(b) 将某一列的元素都减去 n.

求所有可能的 n 值，使得对给定的任何矩阵，在经过有限次上述操作后，其中元素全部变为 0.

5 半径为 1 的圆上三点 P_0, P_1, P_2 满足 $P_1P_2=t<2$，定义 P_i 是 $\triangle P_{i-1}P_{i-2}P_{i-3}$ 的外接圆圆心 ($i\geqslant 3$).

(ⅰ) 证明 $P_1, P_5, P_9, P_{13}, \cdots$ 共线；

(ⅱ) 令 $P_1P_{1001}=x$，$P_{1001}P_{2001}=y$，求使 $\sqrt[500]{\frac{x}{y}}$ 是整数的 t 值.

---

❶ 原题中无此条件，参赛同学给出了两种不同的解答，具体参看评注.

第 34 届加拿大数学奥林匹克(2002)

1 集合$\{1,2,\cdots,9\}$的子集 S 满足其中每一个无序数对的和均不同,例如:$\{1,2,3,5\}$有这种性质,$\{1,2,3,4,5\}$则没有,因为$\{1,4\}$和$\{2,3\}$的和均为 5.问 S 中最多含有几个元素.

2 如果每一个不超过正整数 n 的正整数都可以写成 n 的不同因子的和,则称 n 为“好数”.例如 6 的因子有 1,2,3,6.因为

$$1=1,2=2,3=3,4=1+3,5=2+3,6=6,$$

所以说 6 是“好数”.证明:两个“好数”的乘积也是“好数”.

3 证明:对任意正实数 a,b,c,有

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geqslant a+b+c,$$

并求出取等号的条件.

4 已知$\odot O$半径为 r,A,B 是$\odot O$上不同的点,且 $AB<\sqrt{3}r$,以 B 为圆心,AB 为半径作圆交$\odot O$于点 C.P 是$\odot O$内一点,$\triangle ABP$ 为正三角形,CP 的延长线交$\odot O$于点 Q.证明:$PQ=r$.

5 已知 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$,求所有满足下列条件的函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$:

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2).$$

第 35 届加拿大数学奥林匹克(2003)

1 在一个标准的时钟上,时针和分针连续转动.设 m 是整数,且 $1\leqslant m\leqslant 720$.当前是12:00过 m 分钟,时针和分针的夹角恰为 1°.试确定 m 的所有可能值.

2 求 $2003^{2002^{2001}}$ 的最末三位数字.

3 求不定方程组:

$$\begin{cases}x^3+y^3+z^3=x+y+z,\\ x^2+y^2+z^2=xyz\end{cases}$$

的所有正实数根(x,y,z).

4 给定三圆有公共弦 AB,X 是最小圆周上不同于 A 和 B 的一个动点.直线 AX 与另两圆分别交于 Y 和 Z(Y 在 X 和 Z 之间).

求证:比值$\dfrac{XY}{YZ}$不随动点 X 的位置而改变.

5 S 是平面上 n 个不同的点组成的点集.S 中任意两点距离的最小值为 1.证明:存在一个 S 的由至少$\dfrac{n}{7}$个点组成的子集 T,T 中任意两点至少相距$\sqrt{3}$.

第36届加拿大数学奥林匹克(2004)

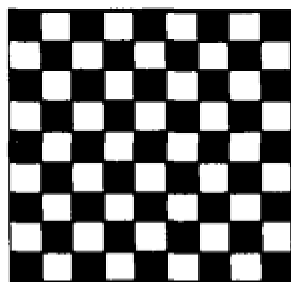
1 求所有满足方程组

$$\begin{cases} xy=z-x-y, & ① \\ xz=y-x-z, & ② \\ yz=x-y-z & ③ \end{cases}$$

的三元实数组(x,y,z).

2 将8个车放到如图的9×9棋盘中,使得这8个车互不攻击且所在小方格颜色相同,问共有多少种不同的方法.

(两车互不攻击是指这两个车不同在任何一行或任何一列)



2004.2题图

3 已知,A、B、C、D是圆上顺次四点,且$AB<AD$,$BC>CD$,$\angle BAD$的平分线交圆于X,$\angle BCD$的平分线交圆于Y,在由这六个点构成的六边形中,如果有四条边的长度相等,那么BD必为圆的直径.

4 已知p是奇素数,证明:

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p^2}.$$

5 设T是由2004^{100}的所有正约数组成的集合,集合S满足:

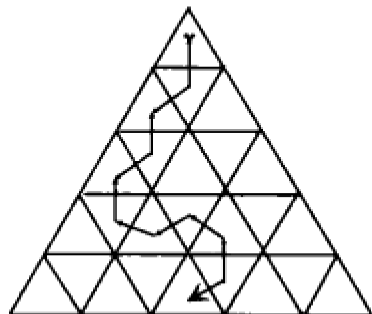
(1)S是T的子集;

(2)S中任何一个元素都不是S中另一个元素的倍数.

求S中元素个数的最大值.

第 37 届加拿大数学奥林匹克(2005)

1 将边长为 n 的正三角形每条边 n 等分，得到若干个单位正三角形. 令 $f(n)$表示第一层的小三角形到最底层正中的小三角形的不同路径数. 每次移动，只能从一个单位三角形走到另一个与它有公共边，且与其在同一行或在其所在行下面一行的单位三角形中. 同时，不能经过同一个小三角形 2 次或 2 次以上. 图中给出了 $n=5$ 时的一条路径. 试确定 $f(2005)$的值.



2005. 1 图

2 正整数组(a,b,c)满足 $a^2+b^2=c^2$. 证明：

(i)$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2>8$；

(ii)不存在整数 n，使得存在(a,b,c)满足$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2=n$.

3 设 S 是一个由圆内的 $n(n\geqslant 3)$点组成的集合. 求证：

(i)总可以找到 S 中的三个不同的点 a、b、c，使得存在对应的圆周上的三个点 A、B、C，满足 a、b、c 分别是 S 中离 A、B、C 最近的点；

(ii)无论 n 为何值，都无法保证找到 S 中的四个点满足(i)中的条件.

4 记$\triangle ABC$ 的周长、面积和外接圆半径分别为 P、K、R，试求$\frac{KP}{R^3}$的最大值.

5 若三元正整数组(a,b,c)满足

$$a\leqslant b\leqslant c,(a,b,c)=1\text{ 且}(a+b+c)\mid(a^n+b^n+c^n),$$

则称(a,b,c)为“n-幂次”的. 例如：(1,2,2)是“5-幂次”的.

(i)求所有的三元组，使得对所有 $n\geqslant 1$，该数组是“n-幂次”的.

(ii)求所有的三元组，使之是“2004-幂次”的和“2005-幂次”的但不是“2007-幂次”的.

第38届加拿大数学奥林匹克(2006)

1 设$f(n,k)$为把k块糖分给n个小孩,且使每个小孩至多分得2块糖的分法数目.例如,当$n=3$时,$f(3,7)=0$,$f(3,6)=1$,$f(3,4)=6$.求$f(2006,1)+f(2006,4)+f(2006,7)+\cdots+f(2006,1000)+f(2006,1003)$的值.

2 设$\triangle ABC$为锐角三角形,矩形$DEFG$内接于$\triangle ABC$,使得D在AB上,E在AC上,F和G在BC上.试求所有可能的矩形$DEFG$的对角线交点的轨迹.

3 在一个m行n列非负实数阵中,每行、每列中都至少有一个正数.若某一行与某一列相交于一个正数,则该行的各数之和与该列的各数之和相等.求证:$m=n$.

4 一次循环赛中有$2n+1$支参赛队,其中每队与其他队都只打一场比赛,且比赛结果中没有平局.若三个队X、Y、Z满足:X击败Y,Y击败Z,Z击败X,则称它们形成一个环形三元组.

(1)求环形三元组的最小可能数目;

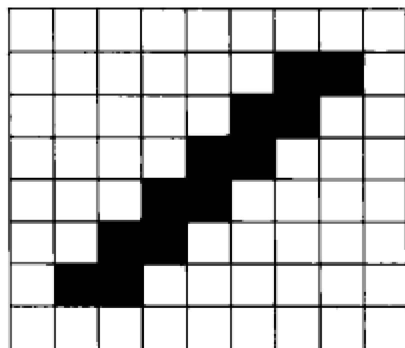
(2)求环形三元组的最大可能数目.

5 圆的内接直角$\triangle ABC$的三个顶点分圆为三段弧,直角顶点A所对的$\overset{\frown}{BC}$为一个半圆,$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{AC}$为劣弧.对三段弧的每一段作切线,使切点恰为切线被直线AB、AC所截得的线段的中点.例如过$\overset{\frown}{BC}$上一点D作切线,分别交直线AB、AC于点D',D'',使得D恰为线段$D'D''$的中点.类似地得到点E和F.

求证:$\triangle DEF$是等边三角形.

第39届加拿大数学奥林匹克(2007)

1 在8×9的方格表上已经放置了6块2×1的多米诺骨牌,位置如图所示,则该棋盘上至多可以放置多少块多米诺骨牌(每块骨牌都在方格表内,且互不重叠,包含已放置的6块多米诺)?



2007.1图

2 给定两个三角形满足如下条件:

(1)一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应相等;

(2)这两个三角形相似,但不一定全等.

求证:这两个三角形的相似比介于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$和$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$之间.

3 已知在$\mathbf{R}$上取值的函数f对任意实数x、y,均有

$$f(xy)+f(y-x)\geqslant f(y+x).$$

(1)试给出一个满足条件的非常数多项式$f(x)$;

(2)求证:对于任意实数x,均有$f(x)\geqslant 0$.

4 对于满足$ab\neq 1$的实数a、b定义运算“$*$”:

$$a*b=\frac{a+b-2ab}{1-ab}.$$

现有一个项数为$n(n\geqslant 2)$的实数列S,其所有项x均满足$0<x<1$,从S中任取两项a、b,将它们删除,并将$a*b$的值添在S的最后,这样得到的新数列的项数就减少了1.重复该操作直到仅剩下一项.

(1)求证:最后剩下的一项的值与每一步操作中所取的两项无关;

(2)若S中的项的取值范围变为$0<x\leqslant 1$,且S中恰有一项为1,又将会出现的什么样的结论?

5 $\triangle ABC$的内切圆分别切三边BC、CA、AB于点D、E、F,$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$与$\triangle AEF$的外接圆$\odot O_1$、$\triangle BFD$的外接圆$\odot O_2$、$\triangle CDE$的外接圆$\odot O_3$分别交于点A和P、B和Q、C和R.求证:

(1)$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$交于一点;

(2)PD、QE、RF三线交于一点.

第40届加拿大数学奥林匹克(2008)

1　凸四边形 $ABCD$ 中,AB 是最长边.点 M、N 分别在边 AB、BC 上,且线段 AN、CM 均平分四边形 $ABCD$ 的面积.求证:线段 MN 平分对角线 BD.

2　求所有函数 $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$,使得对任意有理数 x,y,均有

$$f(2f(x)+f(y))=2x+y.$$

3　若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$,求证:

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leqslant\frac{3}{2}.$$

4　求所有函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,使得对任意自然数 n 和素数 p,均有

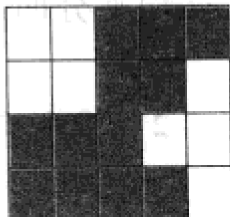
$$(f(n))^p\equiv n(\bmod\ f(p)).$$

5　国际象棋棋盘上"车"的自避行走是指"车"这样行走的一条踪迹路径:从一个方格出发穿过两个方格之间的公共边界(不能斜着走)进入另一个方格,但走过的方格不能再走.即"车"的路径是不自交的.令 $R(m,n)$ 表示 $m\times n$ 的棋盘(m 行,n 列)上自避行走的"车"从左下角走到左上角的路径的数目.

例如:$R(m,1)=1$,$R(2,2)=2$,$R(3,2)=4$,$R(3,3)=11$.求出 $R(3,n)$ 的表达式(用 n 表示).

第41届加拿大数学奥林匹克(2009)

1 给定$m\times n$方格表,其中每个方格被染成黑色或白色的.若某个黑格的同一行左边有白色方格,且同一列上边有白色方格,则称这个黑格为"坏方格"(如图,为一个不含有"坏方格"的4×5方格表).求不含"坏方格"的$2\times n$方格表的数目的表达式.



2009.1 图

2 用纸板裁剪出两个半径不同的圆,每个圆再分成200个相等的扇形,且将每个圆的100个扇形涂成白色,另100个扇形涂成黑色.将小圆叠放在大圆的上面,使得它们的圆心重合.

求证:总可以旋转小圆,使得这两个圆的扇形上下对齐,且小圆至少有100个扇形位于大圆的同色扇形上.

3 定义
$$f(x,y,z)=\frac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)},$$
其中x,y,z为正实数,求$f(x,y,z)$的值域.

4 求所有的有序整数组(a,b),使得3^a+7^b为完全平方数.

5 已知一个给定的平面点集中,任意三点都可被一个半径为1的圆覆盖.求证:这个点集能被一个半径为1的圆覆盖.

二、加拿大数学奥林匹克(1990—2009)解答

第22届加拿大数学奥林匹克(1990)

1 有 $n(n\geqslant 2)$ 名选手参加一项为期 k 天的比赛，在每天的比赛中，选手可能得到的分数为 $1,2,3,\cdots,n$，且没有两个人的得分相同，当 k 天比赛结束时，发现每名选手的总分都是26分．试确定数对 (n,k) 的所有可能情况．

〖**证明**〗所有选手的得分总和为

$$\frac{kn(n+1)}{2}=26n,\text{即 }k(n+1)=52.$$

(n,k) 的取值可以是 $(3,13)$，$(12,4)$，$(25,2)$ 及 $(51,1)$，但最后一种显然不满足要求．

当 $(n,k)=(3,13)$ 时，3名选手13天得分配置为

$(1,2,3)+2(2,3,1)+2(3,1,2)+3(1,3,2)+2(3,2,1)+3(2,1,3)=(26,26,26)$．

当 $(n,k)=(12,4)$ 时，12名选手4天得分配置为

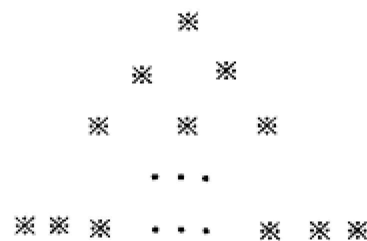
$2(1,2,\cdots,11,12)+2(12,11,\cdots,2,1)=(26,26,\cdots,26)$．

当 $(n,k)=(25,2)$ 时，25名选手2天得分配置为

$(1,2,\cdots,24,25)+(25,24,\cdots,2,1)=(26,26,\cdots,26)$．

故有3组解 $(n,k)=(3,13)$，$(12,4)$ 或 $(25,2)$．

2 如图，将 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个不同的数随机排列成一个三角数阵，设 M_k 是从上往下数第 k 行中的最大数，试求 $M_1<M_2<\cdots<M_n$ 的概率．



1990.2图

〖**解**〗记所求概率为 P_n，则 $P_1=1$．

对于 $n+1$ 行的数阵，$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 个数中最大的数应在第 $n+1$ 行，其概率为

$$\frac{n+1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}=\frac{2}{n+2}.$$

然后可任意填满第 $n+1$ 行，将剩余的 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 个数填入前 n 行，符合要求的概率为 P_n，故 $P_{n+1}=\frac{2}{n+2}P_n$.

所以
$$P_n=\frac{2}{n+1}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot P_1=\frac{2^n}{(n+1)!}.$$

3 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 X，由 X 向 AB、BC、CD、DA 分别作垂线，垂足为 A'、B'、C'、D'.

求证：$A'B'+C'D'=A'D'+B'C'$.

〖**证明**〗由 $XA'\perp AB$，$XB'\perp BC$ 可得 A'、B、B'、X 四点共圆.

由正弦定理，有 $A'B'=XB\cdot\sin B$，

同理可得 $C'D'=XD\cdot\sin D=XD\cdot\sin B$，

$$\therefore A'B'+C'D'=(XB+XD)\cdot\sin B=BD\cdot\sin B=2R\sin A\cdot\sin B.$$

其中 R 为四边形 $ABCD$ 的外接圆半径.

同理可得 $A'D'+B'C'=2R\sin A\cdot\sin B$.

于是 $A'B'+C'D'=A'D'+B'C'$.

4 一个质点在 x 轴上的运动速度最大为 2 米/秒，在平面其他地方的运动速度最大为 1 米/秒. 试求该质点从原点出发在 1 秒钟内所能到达区域的边界曲线.

〖**解**〗[1]由对称性只要考虑第一象限中的可达区域.

设质点从原点 O 到 $P(x,y)$ 的过程中最后离开 x 轴是在 $A(a,0)$ 点（$|a|\leqslant 2$），由于从 O 到 A 的时间不少于 $\frac{|a|}{2}$ 秒，故从 A 到 P 的时间不多于 $1-\frac{|a|}{2}$ 秒. 因此 $(x-a)^2+y^2\leqslant\left(1-\frac{|a|}{2}\right)^2$.

$$y^2\leqslant-\frac{3}{4}a^2+(2x-1)|a|+1-x^2.$$

当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$y^2\leqslant 1-x^2$；

当 $\frac{1}{2}<x\leqslant 2$ 时，

$$y^2\leqslant-\frac{3}{4}\left(|a|-\frac{4x-2}{3}\right)^2+\frac{(2x-1)^2}{3}+1-x^2$$

---

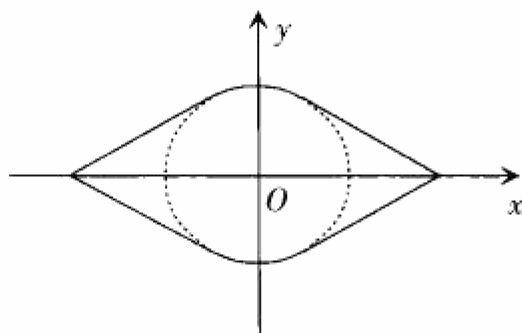
[1] 本解答属于林常（福建教育学院）.

$$\leqslant\frac{(2x-1)^2}{3}+1-x^2=\frac{(2-x)^2}{3}.$$

因此可到达区域的边界线方程是

$$|y|=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|\leqslant\frac{1}{2},\\ \frac{2-|x|}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}<|x|\leqslant 2.\end{cases}$$

它由单位圆 $x^2+y^2=1$ 的上、下两段弧和分别从点 $(\pm 2,0)$ 作的各两条切线段组成(如下图中实线).



1990.4 图

5 已知定义在正整数集上的函数 f 满足:

$$f(1)=1,f(2)=2,$$
$$f(n+2)=f(n+2-f(n+1))+f(n+1-f(n))(n\geqslant 1).$$

(1)求证:$0\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 1$,并且当 $f(n)$ 为奇数时,$f(n+1)=f(n)+1$;

(2)试求适合 $f(n)=2^{10}+1$ 的所有 n 的值,并证明你的结论.

【解】(1)我们首先用数学归纳法证明一个更强的结果:

对任意自然数 n,都有

$$f(n+1)-f(n)\in\{0,1\}.$$

当 $n=1$ 时,$f(2)-f(1)=1$,结论成立.

设当 $n<k$ 时,结论成立.我们有

$$[(k+2)-f(k+1)]-[k+1-f(k)]$$
$$=1-[f(k+1)-f(k)]\in\{0,1\}.$$

因此,由归纳假设,有

$$f((k+2)-f(k+1))-f(k+1-f(k))\in\{0,1\}. \quad ①$$

下面分两种情况讨论:

情况 1 $f(k)-f(k-1)=1$. ②

这时,由已知递推式,有

$f(k+1)-f(k)$

$$=f(k+1-f(k))+f(k-f(k-1))$$
$$-f(k-f(k-1))-f((k-1)-f(k-2))$$
$$=f(k+1-f(k))-f((k-1)-f(k-2))$$
$$=f(k-f(k-1))-f((k-1)-f(k-2)) \quad (根据②)$$
$$\in\{0,1\}. \quad (根据①)$$

情况 2　$f(k)-f(k-1)=0.$　③

这时，由已知递推式，有

$$f(k)=f(k-f(k-1))+f((k-1)-f(k-2)),$$
$$f(k-1)=f((k-1)-f(k-2))+f((k-2)-f(k-3)),$$

故有
$$f(k-f(k-1))=f((k-2)-f(k-3)),$$

由①式，结合单调性，可知它们均等于 $f((k-1)-f(k-2))$. 从而

$$f(k+1)-f(k)$$
$$=f(k+1-f(k))-f((k-1)-f(k-2))$$
$$=f(k+1-f(k))-f(k-f(k-1))$$
$$\in\{0,1\}. \quad (根据①)$$

无论哪种情况，都有 $f(k+1)-f(k)\in\{0,1\}$. 从而对任何自然数 n，都有 $f(n+1)-f(n)\in\{0,1\}$.

显然更有 $0\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 1$.

下用数学归纳法证明当 $f(n)$ 为奇数时，$f(n+1)=f(n)+1$.

由已知，当 $n=1$ 时，$f(1)=1$ 为奇数，且

$$f(2)=f(1)+1.$$

假设当 $n<k$ 时，结论成立.

若 $f(k)$ 为奇数，则 $f(k-1)$ 必为偶数（否则，若 $f(k-1)$ 为奇数，则由归纳假设可得 $f(k)=f(k-1)+1$ 为偶数，矛盾!），于是由前证结果有

$$f(k)=f(k-1)+1,$$
$$f(k+1)=f(k+1-f(k))+f(k-f(k-1))$$
$$=2f(k-f(k-1)),$$

即 $f(k+1)$ 是偶数，再由前证结果，有

$$f(k+1)=f(k)+1.$$

根据数学归纳法原理，对任意自然数 n，当 $f(n)$ 为奇数时，

$$f(n+1)=f(n)+1.$$

(2)我们用数学归纳法证明一个更强的结论：对于任意正整数 $m>1$，方程 $f(n)=2^{m-1}+1$ 有唯一解 $n=2^m$.

事实上，$m=2$ 时，方程化为 $f(n)=3$，它有唯一解 $n=2^2$，即 $n=4$（我们可由已知递推

式得到 $f(3)=2, f(4)=3$；由(1)得 $f(5)=3+1=4$，并由函数 $f(n)$ 的不减性判定解的唯一性).

设 $m=k$ 时，结论成立.

由于 $f(n)$ 的值随着 n 的增加，每次增加 0 或者 1，又从已知的递推式可以看出 $f(n)\to\infty$(否则从某时刻起，$f(n)$ 将为正的常数值，而对足够大的 n，$f(n+2)$ 却为这个常数值的 2 倍，矛盾). 因此，必有整数 n，使得 $f(n)=2^k+1$.

这时，$f(n-1)$ 必为偶数，并且 $f(n-1)=2^k$.

由于 $f(n-f(n-1))+f(n-1-f(n-2))=f(n)=2^k+1$.

并且左端两项的差为 0 或 1，所以

$$f(n-f(n-1))=f(n-1-f(n-2))+1=2^{k-1}+1.$$

由归纳假设，有

$$n-f(n-1)=2^k.$$

从而

$$n=2^k+f(n-1)=2^{k+1}.$$

根据数学归纳法原理，对任意正整数 $m>1$，上述结论成立，即方程 $f(n)=2^{m-1}+1$ 有唯一解 $n=2^m$.

特别地，方程 $f(n)=2^{10}+1$ 的唯一解为 $n=2^{11}$.

第 23 届加拿大数学奥林匹克(1991)

1 证明方程

$$x^2+y^5=z^3$$

有无穷多组整数解,其中 $xyz\neq0$.

〖**证明 1**〗可以验证方程有两组解

$$(x,y,z)=(3,-1,2),(10,3,7).$$

假定(u,v,w)是方程的一组解.那么对任意整数 k,则由$[2,5,3]=30$ 可设

$$x=k^{15}u,y=k^6v,z=k^{10}w.$$

这时,有

$$\begin{aligned}x^2+y^5&=k^{30}u^2+k^{30}v^5\\&=k^{30}(u^2+v^5)\\&=k^{30}w^3=z^3.\end{aligned}$$

于是$(k^{15}u,k^6v,k^{10}w)$是已知方程的解,从而已知方程有无穷多组解.

〖**证明 2**〗取 $x=2^{15k+10}$,$y=2^{6k+4}$,$z=2^{10k+7}$,$k\in\mathbf{N}$,则

$$\begin{aligned}x^2+y^5&=2^{30k+20}+2^{30k+20}\\&=2^{30k+21}=z^3.\end{aligned}$$

因此$(x,y,z)=(2^{15k+10},2^{6k+4},2^{10k+7})$,$k\in\mathbf{N}$ 是已知方程的解,从而已知方程有无穷多组解.

〖**证明 3**〗令 $x=n^5$,$y=n^2$,则

$$x^2+y^5=(2n)n^9.$$

现在取 $n=4r^3$,则

$$2n\cdot n^9=8r^3\cdot2^{18}r^{27}=(2^7r^{10})^3.$$

于是$(x,y,z)=(2^{10}r^{15},2^4r^6,2^7r^{10})$是已知方程的解,从而已知方程有无穷多组解.

2 n 为固定的正整数,求出所有具有以下性质的正整数的和:在二进制中,这个数恰有 $2n$ 个数字,其中 n 个 1,n 个 0(首位数字不能为 0).

〖**解**〗$n=1$ 时,易知所求和为 $S_1=2$.

$n\geqslant2$ 时,首位数字为 1 的 $2n$ 位数,在其余 $2n-1$ 位上,只要 n 个 0 的位置确定了,则 $n-1$ 个 1 的位置也就确定了,从而这个 $2n$ 位二进制数也随之确定.

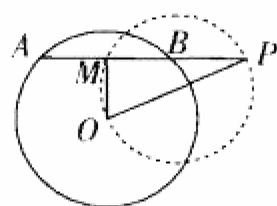
故首位数字为 1 的数共有 C_{2n-1}^n 个.

现考虑第 $k(2n>k\geqslant1)$位数字是 1 的数的个数.因为其中 n 个 0 的位置只可从 $2n-2$ 个位置(除去首位和第 k 位)中选择,故这样的数共 C_{2n-2}^n 个.

将所有这样的 $2n$ 位二进制数相加，按数位求和，便有

$$S_n=2^{2n-1}C_{2n-1}^{n}+(1+2+2^2+\cdots+2^{2n-2})C_{2n-2}^{n}.$$

3 如图，在平面上，设 C 是一个圆，P 是一给定的点，过 P 作直线交 C 于 A、B 两点. 证明：所有弦 AB 的中点在一个圆上.

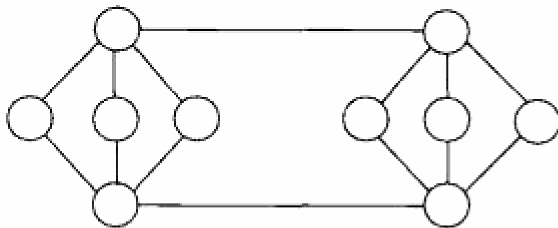


1991.3 图

〖**证明**〗设圆心为 O，弦 AB 的中点为 M，连 OM，则 $OM\perp AB$，即 $\angle OMP=90^\circ$，M 在以线段 OP 为直径的圆上.

〖**评注**〗本题中 M 点的轨迹只是该圆含于圆 C 内的一段圆弧，而非整个圆.

4 从数集$\{0,1,2,\cdots,14\}$中选出不同的数，填入下图中的 10 个小圆中，使得由线段连结的两个数之差的绝对值均不相同. 这可能吗？请证明你的结论.



1991.4 图

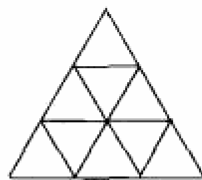
〖**解**〗不可能，用反证法证明如下：

如果能按题中要求从$\{0,1,\cdots,14\}$选出 10 个数填入图中圆内，使得由线段连结的两个数之差的绝对值各不相同. 那么这 14 个差的绝对值应该恰好是 $1,2,\cdots,14$，其中有 7 个奇数，7 个偶数，因而它们的和 S 是奇数.

另一方面，小圆中的每个数在 S 中出现偶数次(每个小圆引出偶数条线段)，所以 S 应当是偶数.

以上矛盾即证明了我们的论断.

5 如图，大三角形的边长为 3，由图中过各交点的直线所成的平行四边形的个数 $f(3)=15$. 求边长为 n 的三角形中相应的平行四边形的个数 $f(n)$.



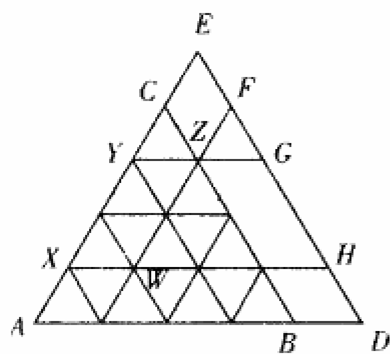
1991.5 图

〖**解**〗设大三角形为$\triangle ABC$(边长为 n)，记两边分别与 AB、AC 平行的平行四边形的个数为 $g(n)$.

在 AB、AC 延长线上分别取点 D、E，使得 $AD=AE=n+1$，则 $DE=n+1$，易知上述平行四边形的每一边的延长线恰好与 DE 相交于一点，这四点互不相同，均为 D、E 或其 $n+1$ 等分点，且与 AB 边平行的边对应的交点靠近点 D，与 AC 边平行的边对应的交点靠近点 E.

反之，从 DE 上的 $n+2$ 个点(包括端点 D、E)中任取四点，过靠近 D 点的两点作 AB 的平行线，过另两点作 AC 的平行线，便可得到上述的平行四边形. 所以上述平行四边形

与 DE 上的四点组之间一一对应. 则有 $g(n)=\mathrm{C}_{n+2}^{4}$，从而 $f(n)=3g(n)=3\mathrm{C}_{n+2}^{4}$.



1991.5 图

第 24 届加拿大数学奥林匹克(1992)

1 证明:前 n 个正整数的乘积能被它们的和整除的充要条件是:$n+1$ 不是一个奇素数.

〖**证明**〗前 n 个自然数的和与积分别为$\frac{n(n+1)}{2}$与 $n!$.

先证充分性:$n+1$ 不是奇素数,则$\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

(1)若 $n+1$ 为偶数,则 n 为奇数.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.

当 $n \geqslant 3$ 时,有$\frac{n+1}{2} \leqslant n-1$,故$\frac{n+1}{2} \mid (n-1)!$,从而$\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

(2)若 $n+1$ 为奇合数,则 n 为偶数,设 $n+1=ml$,其中 m,l 均是大于 3 的奇数.从而 $m,l<\frac{n}{2}$.

若 $m \neq l$,则$\frac{n}{2} \cdot m \cdot l \mid n!$,即$\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

若 $m=l$,则当 $m=3$ 时,$n=8$,此时有$\frac{n(n+1)}{2}=36 \mid 8!$.

当 $m \geqslant 4$ 时,有 $3m<n$,所以 $m,2m,\frac{n}{2}$或者 $m,3m,\frac{n}{2}$是 3 个互不相同且小于 n 的自然数,因此也有$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2} \cdot m^2 \mid n!$.

再证必要性:若$\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$,则 $n+1$ 不是奇素数.

若不然,$n+1$ 是奇素数,则 $n+1 \nmid n!$,从而$\frac{n(n+1)}{2} \nmid n!$,矛盾.故结论得证.

〖**评注**〗本题的关键在于充分性的证明中 $n+1$ 为奇合数的情形,以下再给出该情形的两种不同证法:

〖**别证 1**〗设 $n+1=ml$,则有 $m,l \leqslant \frac{n+1}{3} \leqslant n-1$.

若 $m \neq l$,则 $ml \mid (n-1)!$,从而$\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

若 $m=l=p$,则 $p \geqslant 3$,$n-1=p^2-2 \geqslant 3p-2=2p+(p-2)>2p$,则$(n-1)!$ 为多于 $2p$ 个连续自然数的乘积,因此有 $p^2 \mid (n-1)!$,从而$\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

〖**别证 2**〗设 $n+1=ml$，m，l 为奇数且 $3\leqslant m\leqslant l$，则

$$n\geqslant 9,m<2l\leqslant\frac{2}{3}(n+1)=n-1+\frac{5-n}{3}<n-1,$$

所以 $2ml\mid(n-1)!$，则 $ml\mid(n-1)!$，从而 $\frac{n(n+1)}{2}\mid n!$.

2　已知 $x,y,z>0$，证明不等式

$$x(x-z)^2+y(y-z)^2\geqslant(x-z)(y-z)(x+y-z).$$

并确定等号何时成立.

〖**证明 1**〗原不等式等价于

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geqslant x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2.$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\geqslant 0. \quad ①$$

①式是关于 x,y,z 对称的，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$. 令

$$x=z+\delta_1,y=z+\delta_2,\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant 0.$$

那么①式即为

$$(z+\delta_1)(\delta_1-\delta_2)\delta_1+(z+\delta_2)(\delta_2-\delta_1)\delta_2+z\delta_1\delta_2\geqslant 0.$$

$$\Leftrightarrow(\delta_1-\delta_2)[(z+\delta_1)\delta_1-(z+\delta_2)\delta_2]+z\delta_1\delta_2\geqslant 0. \quad ②$$

②式显然成立，从而①式成立，命题得证. 由②式知当且仅当 $\delta_1=\delta_2=0$ 时，即 $x=y=z$ 时等号成立.

〖**证明 2**〗原不等式即

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geqslant x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2.$$

由对称性，可设 $x\geqslant z\geqslant y$，于是

$$x(x-z)^2+y(y-z)^2\geqslant 0\geqslant(x-z)(y-z)(x+y-z).$$

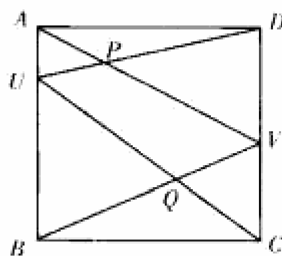
当且仅当 $x=y=z$ 时，等号成立.

〖**评注**〗不等式①即为舒尔(Schur)不等式

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y)\geqslant 0$$

在 $r=1$ 时的特例.

3　如图所示，$ABCD$ 为正方形，U、V 分别是边 AB、CD 内部的点. 确定使四边形 $PUQV$ 面积为最大时，U、V 的所有可能情况.



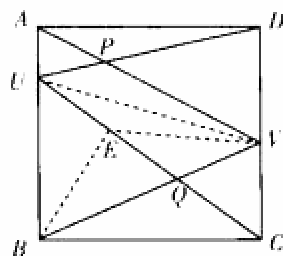
1992.3 图

〖**解 1**〗不妨设 $BU\geqslant CV$，则 $QU\geqslant QC$，且 V 到 QC 的距离 $\leqslant B$ 到 QU 的距离，在 QU 上取点 E，使得 $QE=QC$，则

$$S_{\triangle BUE}\geqslant S_{\triangle UVE},S_{\triangle VQC}=S_{\triangle VQE}.$$

又易知 $S_{\triangle QUV}=S_{\triangle BQC}$，所以

$$\begin{aligned}S_{\triangle UBQ}+S_{\triangle VQC}&=S_{\triangle BUE}+S_{\triangle BQE}+S_{\triangle VQE}\\&\geqslant S_{\triangle UVE}+S_{\triangle BQC}+S_{\triangle VQE}\\&=2S_{\triangle QUV}.\end{aligned}$$



1992.3 图

从而 $S_{\triangle QUV}\leqslant\frac{1}{4}S_{BCUV}$.

同理 $S_{\triangle PUV}\leqslant\frac{1}{4}S_{DAUV}$.

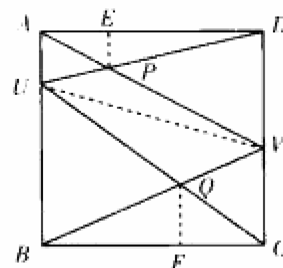
相加得 $S_{PUQV}\leqslant\frac{1}{4}S_{ABCD}$.

并且当且仅当 $BU=CV$ 时等号成立.

〖解 2〗设正方形的边长为 1,连结 UV.

易知 $S_{\triangle PUV}=S_{\triangle APD}$,$S_{\triangle QUV}=S_{\triangle BQC}$.

所以 $S_{PUQV}=S_{\triangle APD}+S_{\triangle BQC}$.



1992.3 图

作 $PE\perp AD$,垂足为 E,作 $QF\perp BC$,垂足为 F,并且设 $PE=x$,$QF=y$,则 $S_{PUQV}=\frac{1}{2}(x+y)$.

设 $AU=a$,$DV=b$,则

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{DE}{AD}+\frac{AE}{AD}=1.$$

故 $x=\frac{ab}{a+b}$,同理,$y=\frac{(1-a)(1-b)}{(1-a)+(1-b)}$. 从而

$$\begin{aligned}S_{PUQV}&=\frac{1}{2}\left[\frac{ab}{a+b}+\frac{(1-a)(1-b)}{(1-a)+(1-b)}\right]\\&=\frac{a+b-a^2-b^2}{2(a+b)(2-a-b)}\\&=\frac{a+b-a^2-b^2}{4(a+b)-2(a+b)^2}\\&\leqslant\frac{a+b-a^2-b^2}{4(a+b)-4(a^2+b^2)}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

当且仅当 $a=b$ 时,上式取等号. 故 U、V 应满足 $AU=DV$.

4 解方程

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3.$$

〖**解** 1〗去分母并整理,得

$$x^4+2x^3-x^2-6x-3=0.$$

因式分解,得

$$(x^2+3x+3)(x^2-x-1)=0.$$

于是 $x=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{3}\mathrm{i})$ 或 $x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$.

〖**解** 2〗令 $t=x+1$,原方程变成倒数方程

$$t^2-2t-1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}=0,$$

即
$$\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2\left(t+\frac{1}{t}\right)-3=0.$$

从而
$$t+\frac{1}{t}=-1 \text{ 或 } 3.$$

即
$$t^2+t+1=0 \quad \text{或} \quad t^2-3t+1=0.$$

于是
$$x=t-1=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{3}\mathrm{i})\text{或}\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5}).$$

5 一副牌有 $2n+1$ 张，其中一张“王”和 $1,2,\cdots,n$ 各两张. 把这 $2n+1$ 张牌排成一行，使得“王”在正中间，且对每个 k，$1\leqslant k\leqslant n$，两张 k 之间恰有 $k-1$ 张牌. 当 $n\leqslant 10$ 时，对怎样的 n，上述安排是可能的，对怎样的 n，上述安排是不可能的？

〖**解**〗对每个 k，$1\leqslant k\leqslant n$，设左边的那个 k 位于第 a_k 号位置，右边的那个 k 位于第 b_k 号位置. 依题意，要完成安排，应有

$$b_k-a_k=k,1\leqslant k\leqslant n.$$

即
$$b_k+a_k-2a_k=k.$$

所以
$$\sum_{k=1}^{n}(b_k+a_k)-2\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k.$$

由于“王”在中间，故“王”位于第 $n+1$ 号位，因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(b_k+a_k)&=1+2+\cdots+(2n+1)-(n+1)\\&=\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}-(n+1)\\&=2n(n+1).\end{aligned}$$

于是 $2\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=2n(n+1)-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3n(n+1)}{2}$.

从而 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\frac{3n(n+1)}{4}\in\mathbf{N}$. 当 $n=1,2,5,6,9,10$ 时，不满足上式，故此时不存在满足题设要求的安排. 当 $n=3,4,7,8$ 时，满足上式，且题设要求的安排是存在的. 例如：

$n=3$ 时，1 1 3 王 2 3 2；

$n=4$ 时，1 1 3 4 王 3 2 4 2；

$n=7$ 时，1 1 3 6 7 3 4 王 5 6 4 7 2 5 2；

$n=8$ 时，5 8 4 1 1 5 4 7 王 8 6 2 3 2 7 3 6.

〖**评注**〗对于 $n=3,4,7,8$ 中的每一个，均有不同的安排方式，有兴趣的读者可以考虑下面的问题：

对 $n=3,4,7,8$，满足条件的不同安排方式数分别是多少？

第25届加拿大数学奥林匹克(1993)

1 一个三角形的3条边长及一条高是4个连续的正整数,且这条高将三角形分成的两个直角三角形的边长均为整数.求这个三角形的三边长,并证明这是唯一的.

〖解〗设$\triangle ABC$中三边及高AD为正整数$n,n+1,n+2,n+3$.

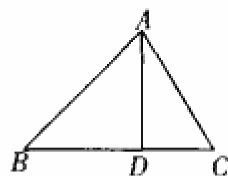
不妨设$AB>AC$,则$AB>AC>AD$,故$AD=n$或$n+1$.

(1)若$AD=n+1$,则$AB=n+3,AC=n+2,BC=n$.从而

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=2\sqrt{n+2},CD=\sqrt{2n+3},$$

其中$2\sqrt{n+2},\sqrt{2n+3}$是正整数,且

$$2\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+3}=n.$$



1993.1图

由 $$\begin{aligned}n^2-4<n^2&=(2\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+3})^2\\&<(2\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+4})^2\\&=(2+\sqrt{2})^2(n+2)\end{aligned}$$

知 $$n-2<(2+\sqrt{2})^2,n<14.$$

又$\sqrt{n+2}$是整数,故$n=2$或7,而此时$\sqrt{2n+3}=\sqrt{7}$或$\sqrt{17}$,均不为整数,因此满足要求的三角形不存在.

(2)若$AD=n$,则$BD\leqslant\sqrt{(n+3)^2-n^2}=\sqrt{6n+9}$,

$$CD\leqslant\sqrt{(n+2)^2-n^2}=2\sqrt{n+1},$$

从而 $$n+1\leqslant BC\leqslant\sqrt{6n+9}+2\sqrt{n+1}<5\sqrt{n+1},$$

也即有$n<24$.

若$BC=n+1$,则$AC=n+2,AB=n+3$.这时

$$BD=\sqrt{6n+9},CD=2\sqrt{n+1},$$

但使得$\sqrt{6n+9},\sqrt{n+1}$均为整数的$n(<24)$不存在.

若$BC=n+2$,则$AC=n+1,AB=n+3$,这时

$$BD=\sqrt{6n+9},CD=\sqrt{2n+1},$$

使得$\sqrt{6n+9},\sqrt{2n+1}$均为整数的n仅有一个:$n=12$.从而

$$AC=13,BC=14,AB=15,AD=12.$$

若$BC=n+3$,则$AC=n+1,AB=n+2$.这时

$$BD=2\sqrt{n+1},CD=\sqrt{2n+1},$$

但使得$\sqrt{n+1},\sqrt{2n+1}$均为整数的$n(<24)$不存在.

综上所述,满足要求的三角形 ABC 有且仅有一解,其边长分别为 13,14,15.

2 证明:实数 x 是有理数的充要条件是:能从数列 $x,x+1,x+2,\cdots$ 中选出 3 个不同的项,组成等比数列.

〖**证明**〗首先证明充分性:

设 $x+i,x+j,x+k$ 成等比数列,则

$$\begin{aligned}(x+j)^2&=(x+i)(x+k)\\&=(x+j+i-j)(x+j+k-j)\\&=(x+j)^2+(k+i-2j)(x+j)+(i-j)(k-j).\end{aligned}$$

从而
$$(k+i-2j)(x+j)=(j-i)(k-j)\neq 0.$$

所以 $k+i-2j\neq 0$,$x+j=\dfrac{(j-i)(k-j)}{k+i-2j}$ 为有理数,x 也为有理数.

再证明必要性:

设 x 为有理数,且 $x=\dfrac{q}{p}$(p、q 为整数且 $p\neq 0$),下证 x、$x+q$、$x+(p+2)q$ 成等比数列.

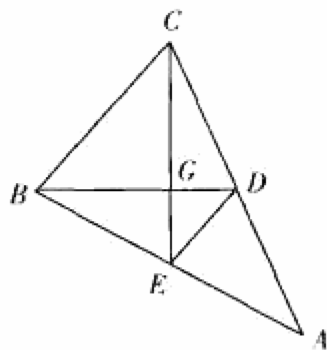
事实上,这时

$$\begin{aligned}x[x+(p+2)q]&=\frac{q}{p}\left[\frac{q}{p}+(p+2)q\right]\\&=\left(\frac{q}{p}\right)^2+2q\times\frac{q}{p}+q^2=(x+q)^2.\end{aligned}$$

3 在$\triangle ABC$中,AC 边上的中线 BD 和 AB 边上的中线 CE 相互垂直,求证:$\cot B+\cot C\geqslant\dfrac{2}{3}$.

〖**证明 1**〗设两条中线 BD,CE 交于 G,令 $GD=m$,$GE=n$,则 $BG=2m$,$CG=2n$,于是

$$\cot B=\cot(\angle CBG+\angle GBE)$$
$$=\frac{1-\dfrac{2n}{2m}\cdot\dfrac{n}{2m}}{\dfrac{2n}{2m}+\dfrac{n}{2m}}=\frac{2m^2-n^2}{3mn}.$$



1993.3 图

类似地,有 $\cot C=\dfrac{2n^2-m^2}{3mn}$.

$\therefore \cot B+\cot C=\dfrac{m^2+n^2}{3mn}\geqslant\dfrac{2mn}{3mn}=\dfrac{2}{3}$.

〖**证明 2**〗[1]分别记$\triangle ABC$的三边长分别为 a,b,c,则 $BE=\dfrac{c}{2}$,$DE=\dfrac{a}{2}$,$CD=\dfrac{b}{2}$,由

[1] 本解答属于王卫华(《数学竞赛之窗》编辑部).

$BD\perp CE$,得

$$BC^2-BE^2=CG^2-GE^2=CD^2-DE^2.$$

将上式化简,得 $$b^2+c^2=5a^2.$$

注意到 $\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}=\dfrac{a^2}{2S}$,则只需证

$$3a^2\geqslant 4S \Leftrightarrow 9a^4\geqslant 16S^2$$
$$\Leftrightarrow 9a^4\geqslant(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)$$
$$\Leftrightarrow 9a^4\geqslant[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]$$
$$\Leftrightarrow 9a^4\geqslant-(b^2-c^2)^2+[(b+c)^2+(b-c)^2]a^2-a^4$$
$$\Leftrightarrow 10a^4\geqslant-(b^2-c^2)^2+2a^2(b^2+c^2) \Leftrightarrow 0\geqslant-(b^2-c^2)^2.$$

这是显然的,故命题得证.

4 若干个学校参加网球比赛,同一学校的选手相互不比赛,每两个学校的每两名选手之间都要比赛一场.在两个男孩或两个女孩之间进行的比赛称为单打,一个男孩和一个女孩之间的比赛称为混合单打.男孩的人数与女孩的人数至多相差1,单打的场数和混合单打的场数也至多相差1.问有奇数个选手的学校至多有几个?

〖**解**〗设有 n 个学校,第 i 个学校派出 x_i 个男孩,y_i 个女孩,$i=1,2,\cdots,n$.由题设,有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\right|\leqslant 1.$$

单打比赛有 $\sum\limits_{i<j}(x_ix_j+y_iy_j)$ 场,混合单打有 $\sum\limits_{i<j}(x_iy_j+x_jy_i)$ 场,由题意,有

$$\left|\sum_{i<j}(x_ix_j+y_iy_j-x_iy_j-x_jy_i)\right|\leqslant 1.$$

即
$$\left|\sum_{i<j}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right|\leqslant 1.$$

因此
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\right)^2-2\sum_{i<j}(x_i-y_i)(x_j-y_j)$$
$$\leqslant 1+2=3.$$

即在 $(x_i-y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 中至多只有三项不为0,而且这三项都应该是1.

这就是说,至多有3个学校的人数 x_i+y_i 为奇数.

如果参赛学校只有3个,其中两个学校各派1名男孩,另一个学校派1名女孩,那么题设的条件全满足,且奇数个选手的学校恰好为3个.故奇数个选手的学校至多有3个.

5 数列 $y_1,y_2,y_3,\cdots$ 满足条件 $y_1=1$,对于 $k>0$,有

$$y_{2k}=\begin{cases}2y_k, & \text{若 } k \text{ 为偶数}\\ 2y_k+1, & \text{若 } k \text{ 为奇数}\end{cases}$$

$$y_{2k+1}=\begin{cases}2y_k, & \text{若 } k \text{ 为奇数}\\ 2y_k+1, & \text{若 } k \text{ 为偶数}\end{cases}$$

证明：每个自然数恰在数列 $y_1,y_2,y_3,\cdots$ 中出现一次.

【证明 1】计算可得：$y_1=1,y_2=2y_1+1=3,y_3=2y_1=2,y_4=2y_2=6,y_5=2y_2+1=7,y_6=2y_3+1=5,y_7=2y_3=4$．即有

$$\{y_1\}=\{1\},\{y_2,y_3\}=\{2,3\},\{y_4,y_5,y_6,y_7\}=\{4,5,6,7\}.$$

显然，我们只需证明下面两个 2^{m-1} 个元素的集合相等：

$$\{y_{2^{m-1}},y_{2^{m-1}+1},\cdots,y_{2^m-1}\}=\{2^{m-1},2^{m-1}+1,\cdots,2^m-1\} \quad ①$$

下用数学归纳法证明①式.

假设①式对某个 $m\geqslant 1$ 成立，考虑 $y_k(k=2^m+d,d=0,1,2,\cdots,2^m-1)$，则有

$$\left[\frac{k}{2}\right]\geqslant 2^{m-1},\left[\frac{k}{2}\right]\leqslant\left[\frac{2^{m+1}-1}{2}\right]=2^m-1.$$

又因为 k 为偶数时，$k=2\cdot\frac{k}{2}=2\cdot\left[\frac{k}{2}\right]$，

k 为奇数时，$k=2\cdot\frac{k-1}{2}+1=2\cdot\left[\frac{k}{2}\right]+1$，所以

$$2y_{\left[\frac{k}{2}\right]}\leqslant y_k\leqslant 2y_{\left[\frac{k}{2}\right]}+1.$$

由归纳假设知

$$\{y_{2^m},y_{2^m+1},\cdots,y_{2^{m+1}-1}\}\subseteq\{2^m,2^m+1,\cdots,2^{m+1}-1\}.$$

下面证明对 $2^m\leqslant k\leqslant 2^{m+1}-1$，映射 $k\to y_k$ 是一一对应的.

假设 $y_i=y_j$，且 $2^m\leqslant i,j\leqslant 2^{m+1}-1$，则可设 $i=2k_i+\varepsilon_i,j=2k_j+\varepsilon_j$，其中 $\varepsilon_i,\varepsilon_j\in\{0,1\},2^{m-1}\leqslant k_i,k_j\leqslant 2^m-1$. 则由条件有 $2y_{k_i}=2y_{k_j}$，又由归纳假设，有 $k_i=k_j$，从而 $\varepsilon_i=\varepsilon_j$（否则 $|y_i-y_j|=1$，矛盾）. 即得 $i=j$.

这就是说 $\{y_{2^m},y_{2^m+1},\cdots,y_{2^{m+1}-1}\}=\{2^m,2^m+1,\cdots,2^{m+1}-1\}$. 所以①式对任意 $m\geqslant 1$ 成立. 命题得证.

【证明 2】用二进制表示所有正整数. 设 $n=(a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0)_2$，其中 $a_m=1,a_i=0$ 或 1，$i=0,1,\cdots,m-1$.

我们用数学归纳法证明

$$y_n=(b_m b_{m-1}\cdots b_1 b_0)_2,$$

其中 $b_m=1,b_i\equiv a_i+a_{i+1}\pmod 2),i=0,1,\cdots,m-1$.

当 $n=1$ 时，显然成立. 设对小于 n 的自然数命题成立. 对于 $n=(a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0)_2$，记 $n'=(a_m a_{m-1}\cdots a_1)_2$，则有 $y_{n'}=(b_m b_{m-1}\cdots b_1)_2$ 满足上述要求. 由题设

(1)若 $a_1a_0=00$，则 $y_n=2y_{n'}=2\cdot(b_m b_{m-1}\cdots b_1)_2=(b_m b_{m-1}\cdots b_1 b_0)_2$，其中 $b_0=0\equiv a_1+a_0\pmod 2$；

(2)若 $a_1a_0=10$，则 $y_n=2y_{n'}+1=(b_m b_{m-1}\cdots b_1 1)_2=(b_m b_{m-1}\cdots b_1 b_0)_2$，其中 $b_0=1\equiv a_1+a_0\pmod 2$；

(3)若 $a_1a_0=01$，则 $y_n=2y_{n'}+1=(b_m b_{m-1}\cdots b_1 1)_2=(b_m b_{m-1}\cdots b_1 b_0)_2$，其中 $b_0=1\equiv a_1$

$+a_0 \pmod 2$;

(4)若 $a_1a_0=11$,则 $y_n=2y_{n'}=(b_mb_{m-1}\cdots b_10)_2=(b_mb_{m-1}\cdots b_1b_0)_2$,其中 $b_0=0\equiv a_1+a_0 \pmod 2$.

因此,命题对任意正整数 n 均成立.

反之,对任意数 $(b_mb_{m-1}\cdots b_1b_0)_2$,可以唯一确定 $n=(a_ma_{m-1}\cdots a_1a_0)_2$ 如下:

$$a_m=b_m=1, a_i\equiv b_i-a_{i+1} \pmod 2.$$

所以,$n\to y_n$ 是 $\mathbf{N}_+\to\mathbf{N}_+$ 的一一对应,从而命题得证.

第 26 届加拿大数学奥林匹克(1994)

1 求和：$\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$.

〖**解**〗

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}\\
=&\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\left(\frac{n}{(n-1)!}+\frac{n+1}{n!}\right)\\
=&\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n+1}{n!}\\
=&\sum_{n=0}^{1993}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n!}+\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n+1}{n!}\\
=&-1+\frac{1995}{1994!}.
\end{aligned}$$

〖**评注**〗用类似地方法可以得到更一般的结果：

$$\sum_{n=1}^{k}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}=-1+(-1)^k\frac{k+1}{k!}.$$

2 求证：$\sqrt{2}-1$ 的每个正整数次幂都具有 $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ 的形式，其中 m 是某个正整数(例如 $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}$).

〖**证明 1**〗我们用数学归纳法证明：

$$(\sqrt{2}-1)^n=\begin{cases}a\sqrt{2}-b, & \text{其中 } 2a^2=b^2+1, n \text{ 是奇数},\\ a-b\sqrt{2}, & \text{其中 } a^2=2b^2+1, n \text{ 是偶数}.\end{cases}$$

当 $n=1,2$ 时，有

$$(\sqrt{2}-1)^1=1\cdot\sqrt{2}-1,\quad 2\cdot1^2=1^2+1,$$
$$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2},\qquad 3^2=2\cdot2^2+1.$$

假设对奇数 $n(\geqslant1)$ 命题成立，则

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2}-1)^{n+1}&=(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}-1)\\
&=(a\sqrt{2}-b)(\sqrt{2}-1)(\text{其中 } 2a^2=b^2+1)\\
&=(2a+b)-(a+b)\sqrt{2}=A-B\sqrt{2},
\end{aligned}$$

其中 $A=2a+b, B=a+b$. 于是

$$\begin{aligned}
A^2&=(2a+b)^2=4a^2+4ab+b^2\\
&=2a^2+4ab+2b^2+1=2B^2+1,
\end{aligned}$$

从而命题对 $n+1$ 也成立.

假设对偶数 $n(\geqslant 2)$ 命题成立,则

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^{n+1}&=(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}-1)\\&=(a-b\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)(\text{其中 } a^2=2b^2+1)\\&=(a+b)\sqrt{2}-(a+2b)=A\sqrt{2}-B,\end{aligned}$$

其中 $A=a+b$,$B=a+2b$. 于是

$$\begin{aligned}2A^2&=2a^2+4ab+2b^2\\&=a^2+4ab+4b^2+a^2-2b^2\\&=B^2-1,\end{aligned}$$

从而命题对 $n+1$ 也成立.

综上所述,欲证命题成立.

于是,当 n 是奇数时,取 $m=2a^2$,当 n 是偶数时,取 $m=a^2$.

〖**证明 2**〗对于给定的正整数 n,记 $a=(\sqrt{2}-1)^n$,$b=(\sqrt{2}+1)^n$,则 $ab=1$,记 $c=\dfrac{b+a}{2}$,$d=\dfrac{b-a}{2}$.

若 n 为偶数,设 $n=2k$,则

$$\begin{aligned}c&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\left(\sqrt{2}^{n-i}+(-1)^i\sqrt{2}^{n-i}\right)\\&=\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_{2k}^{2j}\sqrt{2}^{2k-2j}=\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_{2k}^{2j}2^{k-j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{\sqrt{2}}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{C}_n^i\left(\sqrt{2}^{n-i}-(-1)^i\sqrt{2}^{n-i}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{k-1}\mathrm{C}_{2k}^{2j+1}\sqrt{2}^{2k-2j-1}=\sum_{j=0}^{k-1}\mathrm{C}_{2k}^{2j+1}2^{k-j},\end{aligned}$$

这表明 c 和 $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ 均为正整数. 类似地,当 n 为奇数时,有 $\dfrac{c}{\sqrt{2}}$ 和 d 都是正整数,从而 c^2 和 d^2 均为正整数,注意到

$$c^2-d^2=\frac{1}{4}\left((b+a)^2-(b-a)^2\right)=ab=1,$$

令 $m=c^2$,则 $m-1=c^2-1=d^2$,$a=c-d=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$,命题得证.

〖**证明 3**〗设 m、n 为正整数,则

$$(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^n=1=(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})(\sqrt{m}+\sqrt{m-1}),$$

从而
$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$
与
$$(\sqrt{2}+1)^n=\sqrt{m}+\sqrt{m-1}$$

必同时成立.

将两式相加,得

$$2\sqrt{m}=(\sqrt{2}-1)^n+(\sqrt{2}+1)^n.$$

从而 $$m=\frac{1}{4}[(\sqrt{2}-1)^{2n}+2+(\sqrt{2}+1)^{2n}].$$

此时,$\sqrt{m}-\sqrt{m-1}=(\sqrt{2}-1)^n$,故只需证明

$$4\mid(\sqrt{2}-1)^{2n}+2+(\sqrt{2}+1)^{2n}.$$

又
$$\begin{aligned}&(\sqrt{2}-1)^{2n}+(\sqrt{2}+1)^{2n}\\=&\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}[(-1)^k\cdot\sqrt{2}^{2n-k}+\sqrt{2}^{2n-k}]\\=&\sum_{l=0}^{n}C_{2n}^{2l}\cdot 2^{n-l+1},\end{aligned}$$

当 $l=0,1,2,\cdots,$时,$2^{n-l+1}\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$,当 $l=n$ 时,$C_{2n}^{2l}\cdot 2^{n-l+1}=2$,从而

$$\sum_{l=0}^{n}C_{2n}^{2l}\cdot 2^{n-l+1}\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4),$$

则 $$(\sqrt{2}-1)^{2n}+2+(\sqrt{2}+1)^{2n}\equiv 2+2\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4),$$

命题得证.

3 25 个人围一圆桌而坐,每小时进行一轮投票.每人必须投“赞成票”或“反对票”.每个人都按下述规则行事:在第 n 轮投票时,如果他和相邻的一人投同样的票,则在第 $n+1$ 轮投票时,他投与第 n 轮一样的票.在第 n 轮投票时,如果他投的票与相邻的两人都不一样,则在第 $n+1$ 轮投和第 n 轮不同的票.求证:不论在第一轮投票时,各人投了什么票,总有一个时刻,从这时刻起,每个人在每一轮中投同样的票.

〖**证明**〗注意到如果在某一轮投票中,相邻的两人投相同的票,则按照规则,他们的观点将永不改变,称这样的人是“稳定的”.由于 25 是奇数,所以在第一轮投票时,必有相邻两人投一样的票,及开始时至少有两人是“稳定的”(用反证法证明,如果在第一轮投票中,没有“稳定的”两人,那么投赞成票和投反对票的人将交错出现,这样,投赞成票和投反对票的人应当一样多,这与总人数 25 为奇数矛盾).

又对于任意一个稳定的人 A,他旁边的人或者是“稳定的”,或者将在下一轮投票时观点变得与 A 相同而成为“稳定的”.于是必有某个时刻这 25 人都成为“稳定的”.这即为我们所要证明的.

〖**评注**〗将 25 改为任一正奇数 $2n+1(n\in\mathbf{N})$,结论依然成立.

4 AB 是圆 Ω 的直径,P 为不在直线 AB 上的一点.直线 AP 与 Ω 的交点为 A 和 U,直线 PB 与 Ω 的交点为 B 和 V(注意,在切线的情况下可能有 $A=U$ 或 $B=V$,且若 P 在圆上,则 $P=U=V$).设 $|PU|=s|PA|$,$|PV|=t|PB|$,s,t 为非负实数,用 s,t 表示

$\angle APB$ 的余弦值.

【解】(1)若 P 在圆 Ω 外,因 $\angle AUB=\angle AVB=90°$,所以

$$\cos\angle APB=\frac{PU}{PB}=\frac{PV}{PA}=\sqrt{\frac{PU}{PB}\cdot\frac{PV}{PA}}=\sqrt{st}.$$

(2)若 P 在圆 Ω 上,则由 $P=U=V$,知 $PU=PV=0$,故 $s=t=0$,因 $\angle APB=90°$,所以 $\cos\angle APB=0$.

(3)若 P 在圆 Ω 内,则

$$\cos\angle APB=\cos(180°-\angle APV)=-\cos\angle APV=-\frac{PV}{PA},$$

$$\cos\angle APB=\cos(180°-\angle BPU)=-\cos\angle BPU=-\frac{PU}{PB},$$

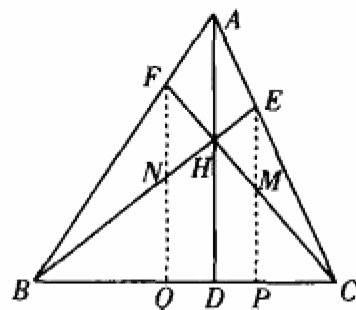
∴
$$\cos\angle APB=-\sqrt{\frac{PU}{PB}\cdot\frac{PV}{PA}}=-\sqrt{st}.$$

5 锐角三角形 ABC 中,AD 是 BC 边上的高,H 是线段 AD 内任一点,BH 和 CH 的延长线分别交 AC、AB 于 E 和 F,求证:$\angle EDH=\angle FDH$.

【证明 1】[1]过点 E 作 $EP\perp BC$,垂足为 P,过 F 作 $FQ\perp BC$,垂足为 Q,设 $EP\cap CH=M$,$FQ\cap BH=N$,则有 $EP/\!/AD/\!/FQ$,从而

$$\frac{FN}{FQ}=\frac{AH}{AD}=\frac{EM}{EP}.$$

即
$$\frac{FN}{EM}=\frac{FQ}{EP}. \quad ①$$



1994.5 图 1

注意到 $\triangle EMH\backsim\triangle NHF$,且 DP,DQ 分别为 $\triangle EMH$ 和 $\triangle NHF$ 的对应高,则有

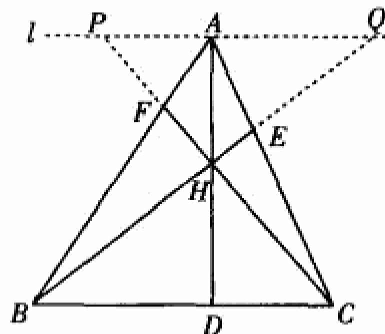
$$\frac{FN}{EM}=\frac{DQ}{DP}. \quad ②$$

由①②得 $\dfrac{FQ}{EP}=\dfrac{DQ}{DP}$,则 $\triangle FQD\backsim\triangle EPD$,从而 $\angle FDQ=\angle EDP$.

从而 $\angle EDH=\angle FDH$.

【证明 2】过 A 作 $l/\!/BC$,延长 DF、DE 分别交 l 于 P、Q.于是有

$$\frac{AP}{BD}=\frac{AF}{FB},\frac{AQ}{DC}=\frac{AE}{EC}. \quad ①$$



1994.5 图 2

又由 Ceva 定理,有

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1. \quad ②$$

[1] 本解答属于黄宣国(复旦大学).

由①②得　　$AP=AQ$.

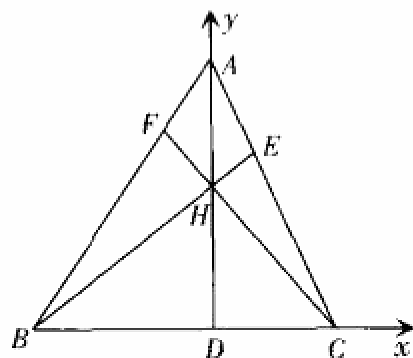
从而有$\triangle APD\cong\triangle AQD$.

也即有$\angle EDH=\angle FDH$.

〖**证明 3**〗如图以 D 为坐标原点建立平面直角坐标系，设 $A(0,a)$，$B(-b,0)$，$C(c,0)$，$H(0,h)$，$E(u,v)$，$F(-r,s)$，其中 a,b,c,h,u,v,r,s 均为正实数. 显然，我们只需证明 $\frac{v}{u}=\frac{s}{r}$.

注意到 A、C、E 共线，有

$$\frac{v}{u-c}=\frac{a}{-c}\Rightarrow\frac{v}{a}=\frac{u-c}{-c}=\frac{-u}{c}+1 \qquad ①$$



1994.5 图 3

又 E、B、H 共线，有

$$\frac{v}{u+b}=\frac{h}{b}\Rightarrow\frac{v}{h}=\frac{u+b}{b}=\frac{u}{b}+1 \qquad ②$$

②－①，得

$$v\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{a}\right)=u\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

从而

$$\frac{v}{u}=\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}=\frac{ah(b+c)}{bc(a-h)},$$

类似地，我们可用 $-r,s,-c,-b$ 代替 u,v,b,c，有

$$\frac{s}{-r}=\frac{ah(-c-b)}{bc(a-h)}，即\frac{s}{r}=\frac{ah(b+c)}{bc(a-h)},$$

从而 $\frac{v}{u}=\frac{s}{r}$，命题得证.

第27届加拿大数学奥林匹克(1995)

1 设 $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$,计算和

$$f(\frac{1}{1996})+f(\frac{2}{1996})+\cdots+f(\frac{1995}{1996}).$$

〖**解**〗注意到

$$f(1-x)=\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\frac{9}{9+3\cdot 9^x}=\frac{3}{9^x+3},$$

从而
$$f(x)+f(1-x)=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{3}{9^x+3}=1.$$

因此
$$f(\frac{1}{1996})+f(\frac{1995}{1996})=1,$$

$$f(\frac{2}{1996})+f(\frac{1994}{1996})=1,$$

$$\cdots$$

$$f(\frac{1995}{1996})+f(\frac{1}{1996})=1,$$

以上各式相加,知原式$=\frac{1995}{2}=997\frac{1}{2}$.

2 已知 a,b,c 为正实数,求证:

$$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

〖**证明1**〗这等价于证明 $a^{3a}b^{3b}c^{3c}\geqslant(abc)^{a+b+c}$. 因为 a,b,c 完全对称,不失一般性,设 $a\geqslant b\geqslant c$. 于是 $a-b\geqslant0,b-c\geqslant0,a-c\geqslant0$,并且 $\frac{a}{b}\geqslant1,\frac{b}{c}\geqslant1,\frac{a}{c}\geqslant1$,因此

$$\frac{a^{3a}b^{3b}c^{3c}}{(abc)^{a+b+c}}\geqslant(\frac{a}{b})^{a-b}(\frac{b}{c})^{b-c}(\frac{a}{c})^{a-c}\geqslant1.$$

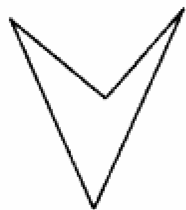
〖**证明2**〗如果把 a,b,c 分别看成 a,b,c 的权,那么运用几何—调和平均不等式和算术—几何平均不等式,我们得到

$$\sqrt[a+b+c]{a^ab^bc^c}\geqslant\frac{a+b+c}{\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}}=\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}.$$

由此立得 $a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

3 如果一个四边形任意一对边不相交,且有一个内角大于180°,那么我们就称它为“镖形”(如图所示). 设 C 是一个凸 s 边形,将 C 划分成 q 个四边形,任意两个四边形不重

叠(也无空隙),设其中有 b 个"镖形",证明:$q\geqslant b+\frac{s-2}{2}$.



1995.3 图

【证明】q 个四边形的内角和为 $2q\pi$. 这些四边形有一些顶点是凸 s 边形 C 的顶点,在这些顶点处的内角合在一起是 $(s-2)\pi$. 还有一些顶点在凸 s 边形 C 的内部或边上.

由于每个"镖形"有一个大于 $180°$ 的内角,称之为优角,显然优角的顶点不是凸 s 边形 C 的顶点,因而一定在 C 的内部. 这样 C 内部的顶点至少 b 个,在这些顶点处的内角和是 $2b\pi$.

于是 $2q\pi\geqslant 2b\pi+(s-2)\pi$. 从而 $q\geqslant b+\frac{s-2}{2}$.

4 设 n 是一个固定的正整数,证明:对任何非负整数 k,下述不定方程

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=y^{3k+2}$$

有无穷多个正整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n;y)$.

【证明】由 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$,可得当 $k=0$ 时,

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n;y)=(1,2,\cdots,n;\frac{n(n+1)}{2})$$

为一组解.

由此,可在一般情况下构造无穷多组解,令 $c=\frac{n(n+1)}{2}$,并注意到对任意正整数 q,有

$$\begin{aligned}&(c^kq^{3k+2})^3+(2c^kq^{3k+2})^3+\cdots+(nc^kq^{3k+2})^3\\=&c^{3k}q^{3(3k+2)}(1^3+2^3+\cdots+n^3)\\=&c^{3k}q^{3(3k+2)}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\\=&c^{3k+2}q^{3(3k+2)}=(cq^3)^{3k+2}.\end{aligned}$$

也即 $(x_1,x_2,\cdots,x_n;y)=(c^kq^{3k+2},2c^kq^{3k+2},\cdots,c^kq^{3k+2};cq^3)$ 是解,证毕.

【评注】本题解答的关键在于构造出一组通解,构造的方式可以不同,以下再给出两个不同的构造方法:

【别证 1】对任意正整数 q,取 $x_1=x_2=\cdots=x_n=n^{2k+1}q^{3k+2}$,$y=n^2q^3$. 则

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=n(n^{2k+1}q^{3k+2})^3=n^{2(3k+2)}q^{3(3k+2)}=y^{3k+2}.$$

【别证 2】若 $n=1$,取 $x_1=q^{3k+2}$,$y=q^3$,即为一组解,对于 $n>1$,我们寻求形如

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=n^p,y=n^q$$

的通解. 则有

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=y^{3k+2}\Leftrightarrow n^{3p+1}=n^{(3k+2)q}$$
$$\Leftrightarrow 3p+1=(3k+2)q\Leftrightarrow(3k+2)q-3p=1.$$

最后一个等式的一组通解为 $q=3t+2$, $p=(3k+2)t+(2k+1)$(t 为非负整数). 从而方程有无穷多组解：

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=n^{(3k+2)t+(2k+1)},\ y=n^{3t+2}.$$

5 设 u 为区间$(0,1)$内一实参数，定义

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant u,\\ 1-(\sqrt{ux}+\sqrt{(1-u)(1-x)})^2 & u\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

数列$\{u_n\}$如下递归定义：

$$u_1=f(1),\ u_n=f(u_{n-1})\ (n>1).$$

求证：一定存在正整数 k，使得 $u_k=0$.

【**证明**】易见 $u_1=1-u$，由于对所有 $x\in[u,1]$，$u\leqslant x$ 且 $1-x\leqslant 1-u$，我们得到

$$\begin{aligned}&1-(\sqrt{ux}+\sqrt{(1-u)(1-x)})^2\\ =&1-ux-(1-u)(1-x)-2\sqrt{ux(1-u)(1-x)}\\ =&u+x-2ux-2\sqrt{ux(1-u)(1-x)}\\ \leqslant&u+x-2ux-2u(1-x)=x-u.\end{aligned}$$

因此，
$$f(x)=0,\quad 若\ 0\leqslant x\leqslant u, \qquad ①$$
$$f(x)\leqslant x-u,\quad 若\ u\leqslant x\leqslant 1, \qquad ②$$

若 $u_1=1-u\geqslant u$，由②，有 $u_2=f(u_1)\geqslant u_1-u=1-2u$，简单归纳，知对 $i=1,2,\cdots,n$，若 $u_i\geqslant u$，则

$$u_{n+1}=f(u_n)\leqslant u_n-u\leqslant 1-(n+1)u\ .$$

于是对某个充分大的 k，必可使 $u_{k-1}<u$，从而 $u_k=f(u_{k-1})=0$.

第 28 届加拿大数学奥林匹克(1996)

1 如果 α,β,γ 是方程 $x^3-x-1=0$ 的根,求 $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ 的值.

〖**解**〗设 $f(x)=x^3-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 有根 α,β,γ,则根据多项式根的有关结论可得如下结果:

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\alpha\beta\gamma=1.$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\\&=2\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{1-\gamma}\right)-3\\&=2\cdot\frac{3-2(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}-3\\&=\frac{4}{f(1)}-3=-7.\end{aligned}$$

2 求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y,\\\dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z,\\\dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x,\end{cases}$$

的所有实数解,并证明你的结论.

〖**解 1**〗显然,x,y,z 均为非负实数,设 $x=y$,则 $x=y=z$.

由 $4x^2=x+4x^3$,得 $x=0$ 或 $\frac{1}{2}$.

设 $x>y$,则有 $y=\frac{4x^2}{1+4x^2}=1-\frac{1}{1+4x^2}>1-\frac{1}{1+4y^2}=\frac{4y^2}{1+4y^2}=z$,及

$$z=\frac{4y^2}{1+4y^2}=1-\frac{1}{1+4y^2}>1-\frac{1}{1+4z^2}=\frac{4z^2}{1+4z^2}=x,$$

从而 $x>y>z>x$,矛盾!同理,$x<y$ 亦可推出矛盾,故只能 $x=y=z$,故而原方程组仅有两组解:

$$(x,y,z)=(0,0,0)\text{或}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

〖**解 2**〗注意到 x,y,z 非负,把方程组中三式相加得

$$x+y+z=\frac{4x^2}{1+4x^2}+\frac{4y^2}{1+4y^2}+\frac{4z^2}{1+4z^2},$$

移项并整理，得

$$\frac{x(2x-1)^2}{1+4x^2}+\frac{y(2y-1)^2}{1+4y^2}+\frac{z(2z-1)^2}{1+4z^2}=0,$$

由于每一项是非负的，所以每一项必须是 0. 因此每一个变量是 0 或 $\frac{1}{2}$. 经验证原方程组仅有解 $x=y=z=0$ 和 $x=y=z=\frac{1}{2}$.

〖解 3〗显然，x,y,z 均为非负实数，易知若 x,y,z 中有一个为 0，则必有 $x=y=z=0$，不妨设 $x,y,z>0$，三式相乘，有

$$\frac{64x^2y^2z^2}{(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)}=xyz.$$

从而

$$(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)=64xyz.$$

而由基本不等式，有

$$(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)\geqslant 4x\cdot 4y\cdot 4z=64xyz,$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{2}$ 时取等号.

从而原方程组仅有两组解：

$$(x,y,z)=(0,0,0)\text{或}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

3 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正整数 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列. 设 $f(n)$ 是下述排列的数目，它们满足条件：

(ⅰ) $a_1=1$;

(ⅱ) $|a_i-a_{i-1}|\leqslant 2, i=1,2,\cdots,n-1$,

试问 $f(1996)$ 能否被 3 整除.

〖解〗我们把满足条件(ⅰ)、(ⅱ)的排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称作 n 项正则排列. 对于 n 个数的正则排列，由于 $a_1=1$，故 $a_2=2$ 或 3.

(1)若 $a_2=2$，则 $a_2,a_3,\cdots,a_n$(的各项减去 1 后)是 $n-1$ 项的正则排列，其个数为 $f(n-1)$.

(2)若 $a_2=3,a_3=2$，则必有 $a_4=4$，故 $a_4,a_5,\cdots,a_n$(的各项减去 3 后)是 $n-3$ 项的正则排列，其个数为 $f(n-3)$.

(3)若 $a_2=3,a_3\geqslant 4$，设 a_{k+1} 是该排列中第一个出现的偶数，则前 k 个数应该是 $1,3,5,\cdots,2k-1$，a_{k+1} 是 $2k$，或 $2k-2$. 因此，a_k 与 a_{k+1} 是相邻整数.

由条件(ⅱ)，这排列在 a_{k+1} 后的各数，要么都小于它，要么都大于它，因为 2 在 a_{k-1} 之后，故 $a_{k-2},\cdots,a_n$ 均比 a_{k+1} 小.

这只有一种可能，即先依递增次序排出所有$\leqslant n$的正奇数，再接着依次递减次序排出所有$\leqslant n$的正偶数.

综上，有递推关系

$$f(n)=f(n-1)+f(n-3)+1, n\geqslant 4.$$

容易算出：$f(1)=1, f(2)=1, f(3)=2, f(4)=4$，各项模3的余数依次为

$$1,1,2,1,0,0,2,0,1,1,2,1,\cdots$$

它们构成以8为周期的数列. 又$1996=249\times 8+4$，故

$$f(1996)\equiv f(4)\equiv 1 \pmod 3.$$

故$f(1996)$不能被3整除.

4　已知等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle B$的平分线与AC交于D，且$BC=BD+AD$，求$\angle A$.

【解1】在BC上取一点E，使得$BE=BD$，则$EC=AD$.

由角平分线定理，有

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}=\frac{EC}{DC}.$$

又$\angle C$共用，故$\triangle ABC\backsim\triangle EDC$.

设$\angle ABD=\angle CBD=\theta$，则

$$\angle CDE=\angle DCE=2\theta,$$
$$\angle BDE=\angle BED=4\theta,$$

从而$9\theta=180°$，$\theta=20°$，$\angle A=\angle CED=5\theta=100°$.

【解2】设$\angle ABD=\angle CBD=\theta$，对$\triangle ABD$和$\triangle BDC$利用正弦定理，得到

$$\frac{AD}{BD}=\frac{\sin\theta}{\sin 4\theta}\text{和 }1+\frac{AD}{BD}=\frac{BC}{BD}=\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta},$$

所以

$$1+\frac{\sin\theta}{\sin 4\theta}=\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta},$$

化简，得

$$\sin 4\theta+\sin\theta=2\sin 3\theta\cos 2\theta=\sin 5\theta+\sin\theta.$$

从而$\sin 4\theta=\sin 5\theta$. 注意到$2\theta<90°$，则$5\theta=180°-4\theta$，从而$\theta=20°$，$\angle A=180°-4\theta=5\theta=100°$.

5　设$r_1, r_2, \cdots, r_m$是给定的m个正有理数，且$\sum\limits_{k=1}^{m} r_k=1$. 对任意正整数$n$，定义

$$f(n)=n-\sum_{k=1}^{m}[r_k n].$$

求$f(n)$的最大值和最小值.

其中$[x]$表示不超过x的最大整数.

【解】

$$f(n)=n-\sum_{k=1}^{m}[r_k n]$$

$$=n\sum_{k=1}^{m}r_k-\sum_{k=1}^{m}[r_kn]$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(r_kn-[r_kn])$$

因为 $0\leqslant r_kn-[r_kn]<1,k=1,2,\cdots,m$,故 $0\leqslant f(n)<m$. 又 $f(n)$为整数,故 $0\leqslant f(n)\leqslant m-1$.

设 $r_k=\frac{a_k}{b_k}$,记 $l=[b_1,b_2,\cdots,b_m]$.

取 $n=l$,则 r_kl 为整数,此时 $r_kl-[r_kl]=0$,从而 $f(l)=0$.

取 $n=l-1$,则

$$f(l-1)=\sum_{k=1}^{m}(r_kl-r_k-[r_kl-r_k])$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(1-r_k)=m-1.$$

综上,$f(n)$的最大值和最小值分别为 $m-1$ 和 0.

第 29 届加拿大数学奥林匹克(1997)

1 有多少对正整数 x,y 满足 $x\leqslant y$ 并且最大公约数 $(x,y)=5!$,最小公倍数 $[x,y]=50!$?

〖解〗[1]设 7 到 47 的素数从小到大分别是 $p_1,p_2,\cdots,p_{12}$,则

$$5!=2^3\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot p_1^0\cdot p_2^0\cdot\cdots\cdot p_{12}^0,$$

$$50!=2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot 5^{a_3}\cdot p_1^{b_1}\cdot p_2^{b_2}\cdot\cdots\cdot p_{12}^{b_{12}}.$$

$\because x\mid 50!,y\mid 50!$,故 x,y 具有如下形式:

$$x=2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot\cdots\cdot p_{12}^{n_{15}},$$

$$y=2^{m_1}\cdot 3^{m_2}\cdot\cdots\cdot p_{12}^{m_{15}},$$

其中,$\max\{n_i,m_i\}$是 50! 的第 i 个素因子的次数,$\min\{n_i,m_i\}$是 5! 的第 i 个素因子的次数.

每个 $n_i(i=1,2,\cdots,15)$的选取方式有两种,故 x 的个数为 2^{15}.当 x 选定时,y 是唯一确定的,在这些(x,y)组中有一半满足 $x\leqslant y$,故满足题设条件的正整数对有$\frac{2^{15}}{2}=2^{14}$个.

2 闭区间 $A=[0,50]$是有限个闭区间的并集,这些区间的长度均为 1,证明:可以从中去掉一些闭区间,使得剩下的闭区间互不相交(即交集为空集),并且总长度$\geqslant 25$.

〖证明〗任一区间$[x,x+1)(0\leqslant x\leqslant 49)$被组成 A 的闭区间覆盖,这些长为 1 的闭区间中必有一个左端点落在$[x,x+1)$中,取左端点分别属于

$$[0,1),[2,3),\cdots,[2k,2k+1),\cdots,[48,49)$$

的 25 个闭区间,这些区间的右端点分别在

$$[1,2),[3,4),\cdots,[2k+1,2k+2),\cdots,[49,50)$$

中,因此它们互不相交,并且总长为 25.

3 求证:$\frac{1}{1999}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$.

〖证明〗

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1998}$$

$$>\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1999}=\frac{1}{1999}.$$

又

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1998}\right)^2$$

---

[1] 本解答属于 Deepee Khosla(加拿大).

$$<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1998}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{1998}{1999}$$

$$=\frac{1}{1999}<\frac{1}{1936}=\frac{1}{44^2}.$$

从而$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$.

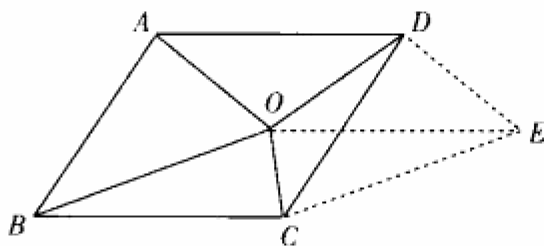
4　已知平行四边形 $ABCD$ 内一点 O 满足$\angle AOB+\angle COD=180°$,求证:$\angle OBC=\angle ODC$.

〖**证明**〗沿向量$\overrightarrow{AD}$平移$\triangle ABO$到$\triangle CDE$,则有四边形 $EOBC$ 为平行四边形.注意到

$$\angle DEC+\angle COD$$
$$=\angle AOB+\angle COD=180°,$$

则 E,C,O,D 四点共圆.

从而有$\angle ODC=\angle OEC=\angle OBC$.



1997.4 图

5　将和式$\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{k^3+9k^2+26k+24}$写成$\frac{p(n)}{q(n)}$的形式,这里 $p(n)$,$q(n)$是 n 的整系数多项式.

〖**证明**〗原式$=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{(k+2)(k+3)(k+4)}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(C_{n+1}^{k+1}-C_n^{k+1})}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{(n+1)!}{(k+4)!\,(n-k)!}-\frac{n!}{(k+4)!\,(n-k-1)!}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k C_{n+4}^{k+4}}{(n+2)(n+3)(n+4)}-\frac{(-1)^k C_{n+3}^{k+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\sum_{k=0}^{n+4}\left((-1)^k C_{n+4}^k-1+C_{n+4}^1-C_{n+4}^2+C_{n+4}^3\right)$$

$$-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\sum_{k=0}^{n+3}\left((-1)^k C_{n+3}^k-1+C_{n+3}^1-C_{n+3}^2+C_{n+3}^3\right)$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{n+4}(-1)^k C_{n+4}^k=(1-1)^{n+4}=0,$$

$$\sum_{k=0}^{n+3}(-1)^k C_{n+3}^k=(1-1)^{n+3}=0,$$

$$(n+1)(-1+C_{n+4}^1-C_{n+4}^2+C_{n+4}^3)=\frac{(n+1)^2(n+2)(n+3)}{6},$$

$$(n+4)(-1+C_{n+3}^1-C_{n+3}^2+C_{n+3}^3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+4)}{6},$$

则有原式$=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$

$$\left(\frac{(n+1)^2(n+2)(n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(n+2)(n+4)}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{2(n+3)(n+4)}.$$

第 30 届加拿大数学奥林匹克(1998)

1 求满足下面方程的实数 a:

$$\left[\frac{a}{2}\right]+\left[\frac{a}{3}\right]+\left[\frac{a}{5}\right]=a.$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

【解 1】[1]由 $x-1<[x]\leqslant x$,可得

$$a>\left(\frac{a}{2}-1\right)+\left(\frac{a}{3}-1\right)+\left(\frac{a}{5}-1\right)=\frac{31}{30}a-3,$$

$$a\leqslant\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{5}=\frac{31}{30}a.$$

解得 $$0\leqslant a<90.$$

又由方程知 a 是非负整数,故

$$a\geqslant\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{a}{5}-\frac{4}{5}\right),$$

$\therefore a\leqslant 59.$

由题设可知: $\left\{\frac{a}{2}\right\}+\left\{\frac{a}{3}\right\}+\left\{\frac{a}{5}\right\}=\frac{1}{30}a.$

且$\left\{\frac{a}{2}\right\}=0,\frac{1}{2}$, $\left\{\frac{a}{3}\right\}=0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}$, $\left\{\frac{a}{5}\right\}=0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$,故共有 $2\times3\times5=30$ 个.

又 $15i+10j+6k(i=0,1,j=0,1,2,k=0,1,2,3,4)$是方程的解.所以,$a=15i+10j+6k(i=0,1,j=0,1,2,k=0,1,2,3,4)$.

【解 2】[2]由条件式知 a 为整数,设 $a=30k+r(k,r\in\mathbf{Z}$ 且 $0\leqslant r\leqslant 29)$.则

$$\left[\frac{a}{2}\right]=15k+\left[\frac{r}{2}\right],\left[\frac{a}{3}\right]=10k+\left[\frac{r}{3}\right],\left[\frac{a}{5}\right]=6k+\left[\frac{r}{5}\right].$$

代入方程,并化简得 $k=r-\left[\frac{r}{2}\right]-\left[\frac{r}{3}\right]-\left[\frac{r}{5}\right]$.

易知,每一个 r,对应着一个整数 k,也即每一个 r 对应着方程的一个解,从而本题的解为

$$a=30k+r\left(k=r-\left[\frac{r}{2}\right]-\left[\frac{r}{3}\right]-\left[\frac{r}{5}\right],r=0,1,2,\cdots,29\right).$$

2 在实数范围内解方程

---

[1] 本解答属于伍能.

[2] 本解答属于 David Arthur(Upper Canada College, Toronto, ON).

$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

〖解 1〗由$\begin{cases}x-\frac{1}{x}\geqslant 0,\\ 1-\frac{1}{x}\geqslant 0\end{cases}$得 $x\geqslant 1$.

又
$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}},\tag{①}$$

故有
$$\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x-1},$$

即
$$\frac{x-1}{x}=\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}},\tag{②}$$

①+②,得
$$x+\frac{x-1}{x}=2\sqrt{x-\frac{1}{x}}.$$

两边平方并化简,得

$$x^4-2x^3-x^2+2x+1=0,$$

也即$(x^2-x-1)^2=0\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$(负根舍去).

〖解 2〗显然 $x>0$,两边平方,得

$$x^2=(x-\frac{1}{x})+(1-\frac{1}{x})+2\sqrt{(x-\frac{1}{x})(1-\frac{1}{x})}.$$

移项,通分,整理,得

$$x^3-x^2-x+2=2\sqrt{x^3-x^2-x+1}.$$

从而
$$x^3-x^2-x+1-2\sqrt{x^3-x^2-x+1}+1=0,$$

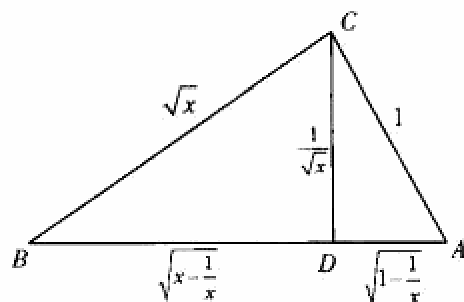
即
$$(\sqrt{x^3-x^2-x+1}-1)^2=0,$$

从而
$$\sqrt{x^3-x^2-x+1}=1,$$

则有 $x^3-x^2-x+1=1$,即 $x^3-x^2-x=0$,故 $x^2-x-1=0$.

解之得,$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$(负根舍去).

〖解 3〗由题设易得 $x>1$,如图,取同一直线上连续三点 A,D,B,使得 $AD=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$,$DB=\sqrt{x-\frac{1}{x}}$,作 AB 的垂线 DC,使得 $DC=\frac{1}{\sqrt{x}}$,则由勾股定理得,$AC=1$,$BC=\sqrt{x}$,且由



1998.2 图

题设知 $AB=x$，在$\triangle ABC$中，设 AC 边上的高为 h，则由

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot h,$$

得
$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot h.$$

从而 $h=\sqrt{x}=BC$，故 $BC\perp AC$，$\angle ACB=90°$.

即有 $x^2=x+1$，解之得 $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$（负根舍去）.

3 已知自然数 $n\geqslant 2$，求证：

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

【**证明 1**】原不等式等价于

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{2n+1}{2n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

上面这个不等式显然，故原不等式成立.

【**证明 2**】注意到 $\frac{1}{3}>\frac{1}{4},\frac{1}{5}>\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$，则

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n},\tag{①}$$

又
$$\frac{n}{2}=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n\text{个}}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

故
$$\frac{1}{2}>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right),\tag{②}$$

将②代入①，得

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

$$>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right),$$

从而，$\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1})>\frac{1}{n}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n})$.

4 在三角形 ABC 中，$\angle BAC=40°$，$\angle ABC=60°$，D 和 E 分别是边 AC 和 AB 上点，使得 $\angle CBD=40°$，$\angle BCE=70°$，F 是直线 BD 和 CE 的交点. 证明：直线 AF 和直 BC 垂直.

〖**证明** 1〗易知 $\angle BCA=80°$，$\angle BCF=70°$，设 $\angle BAF=\theta$，由角元塞瓦定理知

$$\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle BAF}\cdot\frac{\sin\angle ABF}{\sin\angle CBF}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF}=1.$$

即
$$\frac{\sin(40°-\theta)}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin 20°}{\sin 40°}\cdot\frac{\sin 70°}{\sin 10°}=1.$$

注意到 $\sin 70°=\cos 20°$，$\sin 40°=2\sin 20°\cos 20°$，则有

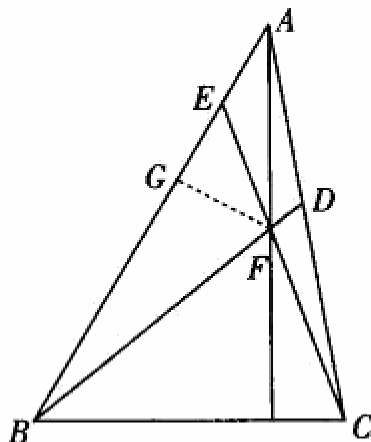
$$2\sin 10°\sin\theta=\sin(40°-\theta)=\sin 40°\cos\theta-\sin\theta\cos 40°.$$

所以，
$$\tan\theta=\frac{\sin 40°}{2\sin 10°+\cos 40°}=\frac{\sin 40°}{2\sin 10°+\cos(30°+10°)}$$
$$=\frac{\sin 40°}{2\sin 10°+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10°-\frac{1}{2}\sin 10°}$$
$$=\frac{\sin 40°}{\frac{3}{2}\sin 10°+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10°}=\frac{\sin 40°}{\sqrt{3}\sin(10°+30°)}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

从而 $\theta=30°$，则 $AF\perp BC$.

〖**证明** 2〗首先
$$\begin{aligned}\sin 80°&=2\sin 40°\cos 40°\\&=2\sin 40°\cos(60°-20°)\\&=2\sin 40°(\cos 60°\cos 20°+\sin 60°\sin 20°)\\&=\sin 40°(\cos 20°+\sqrt{3}\sin 20°),\end{aligned}$$

所以，$\frac{\sin 80°-\sin 40°\cos 20°}{\sin 40°\sin 20°}=\sqrt{3}$.



1998.4 图

如图所示，不妨设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\frac{1}{2}$，则 $BC=\sin 40°$，$AB=\sin 80°$.

易知 $\angle BFC=70°=\angle BCF$，故

$$BF=BC=\sin 40°.$$

作 $GF\perp AB$，垂足为 G，则

$$BG=\sin 40°\cos 20°，GF=\sin 40°\sin 20°，$$

此即
$$\frac{AG}{GF}=\frac{AB-BG}{GF}=\sqrt{3}.$$

所以,$\angle BAF=30°$. 于是 $AF\perp BC$.

【证明 3】[1]设 $BC=1$,分别在$\triangle ABC$ 和$\triangle BCF$ 中用正弦定理,得 $AB=\frac{\sin 80°}{\sin 40°}$,$AC=\frac{\sin 60°}{\sin 40°}$,$BF=\frac{\sin 70°}{\sin 70°}$,$CF=\frac{\sin 40°}{\sin 70°}$,而

$$AF\perp BC\Leftrightarrow AB^2-AC^2=BF^2-CF^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin^2 80°-\sin^2 60°}{\sin^2 40°}=\frac{\sin^2 70°-\sin^2 40°}{\sin^2 70°}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}(\cos 120°-\cos 160°)}{\sin^2 40°}=\frac{\frac{1}{2}(\cos 80°-\cos 140°)}{\sin^2 70°}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin 140°\sin 20°}{\sin^2 40°}=\frac{\sin 110°\sin 30°}{\sin^2 70°}$$

$$\Leftrightarrow\sin 40°\sin 30°=\sin 20°\sin 70°$$

$$\Leftrightarrow\sin 40°=2\sin 20°\cos 20°.$$

这是显然的,故命题得证.

5 设 m 是一个正整数,数列$\{a_n\}$定义为:

$$a_0=0,a_1=m,a_{n+1}=m^2a_n-a_{n-1},n\geqslant 1.$$

证明:一个有序非负整数对(a,b)(其中 $a<b$)是方程$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2$ 的解的充分必要条件是(a,b)具有(a_n,a_{n+1})的形式,其中 $n\geqslant 0$.

【证明】首先我们用数学归纳法证明:

$$\text{对任意 } n\geqslant 0\text{,都有}\frac{a_n^2+a_{n+1}^2}{a_na_{n+1}+1}=m^2.$$

当 $n=0$ 时,$\frac{a_0^2+a_1^2}{a_0a_1+1}=\frac{0+m^2}{0+1}=m^2$.

假设当 $n=k(k\geqslant 0)$时结论成立,也即有$\frac{a_k^2+a_{k+1}^2}{a_ka_{k+1}+1}=m^2$,则

$$a_k^2+a_{k+1}^2=m^2a_ka_{k+1}+m^2,$$

从而
$$a_{k+1}^2+m^4a_{k+1}^2-2m^2a_ka_{k+1}+a_k^2=m^2+m^4a_{k+1}^2-m^2a_ka_{k+1},$$

即
$$a_{k+1}^2+(m^2a_{k+1}-a_k)^2=m^2+m^2a_{k+1}(m^2a_{k+1}-a_k),$$

由递推关系,得
$$a_{k+1}^2+a_{k+2}^2=m^2+m^2a_{k+1}a_{k+2},$$

也即
$$\frac{a_{k+1}^2+a_{k+2}^2}{a_{k+1}a_{k+2}+1}=m^2.$$

---

[1] 本解答属于王卫华(《数学竞赛之窗》编辑部).

综上,结论对任意 $n\geqslant 0$ 均成立,也即对任意 $n\geqslant 0$,(a_n,a_{n+1}) 为方程 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2$ 的解.

其次,我们证明:方程 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2(0<a<b)$ 的任一组解均具有形式 (a_n,a_{n+1}).

设 $(a,b)(a<b)$ 为方程 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2$ 的一组解,则必有 $a\geqslant m$.

反设 $0<a<m$,把上面的方程写成关于 b 的一元二次方程的形式:

$$b^2-(m^2a)b+(a^2-m^2)=0.$$

设这个方程的另一个根为 b_1,由韦达定理,得

$$\begin{cases}b_1+b=m^2a, & ①\\ b_1b=a^2-m^2 & ②\end{cases}$$

由①知,b_1 是整数,由②知,$b_1<0$,于是 b_1 为负整数,从而

$$m^2=\frac{a^2+b_1{}^2}{ab_1+1}<0,$$

矛盾,所以 $a\geqslant m$.

而由上面过程来看,只要 $m<a<b$,b 总可以用另一个正整数 b_1 取代,并且 $b_1b=a^2-m^2<a^2<ab$,所以 $b_1<a$.

这样,由对称性,一组解 (a,b) 就可以用 (b_1,a) 来替代了,此处 $b_1=m^2a-b$.

这一过程不可能无限地进行下去,而由上述论证知,最后总能化到 $(0,m)$ 这组"基本解".以上每步都可以逆推的,最后便知 (a,b) 必定是数列 $\{a_n\}$ 的连续两项.

第31届加拿大数学奥林匹克(1999)

1 求方程 $4x^2-40[x]+51=0$ 的所有实数解.

这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

【解】由题设得 $$40[x]=4x^2+51.$$

由 $x-1<[x]\leqslant x$ 可得

$$40(x-1)<4x^2+51\leqslant 40x$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-40x+91>0,\\4x^2-40x+51\leqslant 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-13)(2x-7)>0,\\(2x-17)(2x-3)\leqslant 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{13}{2}\text{或 }x<\frac{7}{2},\\\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{17}{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leqslant x<\frac{7}{2}\text{或}\frac{13}{2}<x\leqslant\frac{17}{2}.$$

(1)当$\frac{3}{2}\leqslant x<\frac{7}{2}$时,$[x]=1$ 或 2 或 3.

若$[x]=1$,则 $4x^2+51=40\Rightarrow 4x^2=-11$ 不可能;

若$[x]=2$,则 $4x^2+51=80\Rightarrow x=\frac{\sqrt{29}}{2}$,符合题设;

若$[x]=3$,则 $4x^2+51=120\Rightarrow x=\frac{\sqrt{69}}{2}>\frac{\sqrt{64}}{2}=4$,矛盾.

(2)当$\frac{13}{2}<x\leqslant\frac{17}{2}$时,$[x]=6$ 或 7 或 8.

若$[x]=6$,则 $4x^2+51=240\Rightarrow x=\frac{\sqrt{189}}{2}$,符合题设;

若$[x]=7$,则 $4x^2+51=280\Rightarrow x=\frac{\sqrt{229}}{2}$,符合题设;

若$[x]=8$,则 $4x^2+51=320\Rightarrow x=\frac{\sqrt{269}}{2}$,符合题设.

综上,方程的实数解为 $x=\frac{\sqrt{29}}{2},\frac{\sqrt{189}}{2},\frac{\sqrt{229}}{2},\frac{\sqrt{269}}{2}$.

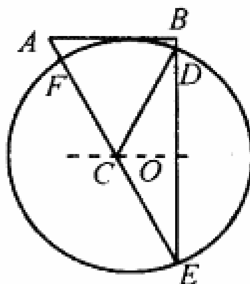
2　已知正三角形 ABC 的高为 1，一个半径为 1 且圆心与 C 在 AB 同侧的圆沿线段 AB 滚动.

证明：该圆在三角形 ABC 内的弧长为定值.

【**证明 1**】设 AC 延长线交⊙O 于 E，BC 交⊙O 于 D. 如图，易知 $OC/\!/AB$，则

$$\angle BCO=\angle CBA=60°,$$
$$\angle ECO=\angle CAB=60°.$$

所以，$\angle BCO=\angle ECO$.



1999. 2 图

注意到 OC 所在直线为⊙O 的对称轴，则 D,E 两点为关于 OC 对称的两点，从而 $CD=CE$，

故　$$\angle CED=\angle CDE=\frac{1}{2}\angle ACD=30°.$$

则⊙O 夹在△ABC 的弧$\widehat{DF}$的长为 $2\pi\times\frac{60°}{360°}=\frac{\pi}{3}$为定值.

【**证明 2**】易知 $CO/\!/AB$，以 C 为原点，CO 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，则 $A(-\frac{1}{\sqrt{3}},1)$，$B(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$，设 $O(a,0)$，则⊙O 方程为

$$(x-a)^2+y^2=1,$$

由题设⊙O 在 AB 上滚动，则 $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant a\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$，$CA$，$CB$ 方程分别为 $y=-\sqrt{3}x$ 与 $y=\sqrt{3}x$.

将以上两直线分别与⊙O 方程联立，解得

$$x_D=\frac{a+\sqrt{4-3a^2}}{4},x_F=\frac{a-\sqrt{4-3a^2}}{4}.$$

从而　$$|DF|^2=(x_D-x_F)^2+\left(\sqrt{3}x_D-(-\sqrt{3}x_F)\right)^2$$
$$=\frac{4-3a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=1.$$

所以 $DF=1$，$OD=OF$，故△ODF 为正三角形. 则

$$\widehat{DF}=\frac{\pi}{3}\cdot 1=\frac{\pi}{3}\text{为定值}.$$

3　试求所有满足方程 $n=(d(n))^2$ 的正整数 n，这里 $d(n)$表示 n 的正因数的个数.

【**解**】显然 $n=1$ 是方程的一个解.

当 $n>1$ 时，设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$，其中，$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 是不同的素数，α_i 为正整数，注意到 $d(n)$是整数，则 n 必为完全平方数，从而 α_i 均为偶数，记 $\alpha_i=2\beta_i(1\leqslant i\leqslant m)$，则

$$d(n)=(2\beta_1+1)(2\beta_2+1)\cdots(2\beta_m+1).$$

显然 $d(n)$ 为奇数，则 n 也为奇数. 从而 $p_i\geqslant 3(1\leqslant i\leqslant m)$. 则

$$p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_m^{\beta_m}=(2\beta_1+1)(2\beta_2+1)\cdots(2\beta_m+1).$$

以下先证一个引理：

对任意正整数 t 和 $p(p\geqslant 3)$，均有 $p^t\geqslant 2t+1$，当且仅当 $p=3,t=1$ 时取等号.

引理的证明：我们对 t 进行归纳.

当 $t=1$ 时，由 $p\geqslant 3$ 得 $p^1=3^1\geqslant 2\cdot 1+1$.

设当 $t=k$ 时，命题成立，即 $p^k\geqslant 2k+1$.

则当 $t=k+1$ 时

$$\begin{aligned}p^{k+1}&=p^k\cdot p\geqslant 3p^k=p^k+2p^k>p^k+2\\&\geqslant 2k+1+2=2(k+1)+1.\end{aligned}$$

即当 $t=k+1$ 时，命题成立.

综上，对任意正整数 t，均有 $p^t\geqslant 2t+1$，当且仅当 $p=3,t=1$ 时取等号，引理得证.

回到原题，注意到 $p_i\geqslant 3(1\leqslant i\leqslant m)$，则 $p_i^{\beta_i}\geqslant 2\beta_i+1$，且当 $p_i>3$ 时，有 $p_i^{\beta_i}>2\beta_i+1$，从而，若存在 $p_i>3(1\leqslant i\leqslant m)$，则

$$p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_m^{\beta_m}>(2\beta_1+1)(2\beta_2+1)\cdots(2\beta_m+1).$$

故只能 $m=1,p_1=3,\beta_1=1$，即 $n=3^2=9$.

综上，适合方程的正整数 n 仅有 1 和 9.

4 已知 $\{a_1,a_2,\cdots,a_8\}$ 为集合 $S=\{1,2,\cdots,17\}$ 的一个 8 元子集.

(ⅰ)证明：存在正整数 k，使得方程 $a_i-a_j=k(1\leqslant i,j\leqslant 8)$ 至少有三组不同的解；

(ⅱ)给出一个 7 元子集，使得对任意正整数 k，方程 $a_i-a_j=k$ 均不存在三组不同的解.

(ⅰ)【**证明 1**】不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_8$，记 $d_i=a_{i+1}-a_i(i=1,2,\cdots,7)$，假设不存在满足题设的整数 k，则在 d_i 中至多有 2 个 1，2 个 2 和 2 个 3(否则，所求方程将有三组不同的解). 注意到

$$\begin{aligned}16&=17-1\geqslant a_8-a_1\\&=(a_8-a_7)+(a_7-a_6)+\cdots+(a_2-a_1)\\&\geqslant 1+1+2+2+3+3+4=16.\end{aligned}$$

这表明，7 个差数 $d_1,d_2,\cdots,d_7$ 中恰有 2 个 1，2 个 2，2 个 3 和 1 个 4. 考察这 7 个差数的排列情况，由于已经有 2 个 2，2 个 3 和 1 个 4，所以

(1)两个 1 不能相邻，1 和 2 也不能相邻；

(2)1 和 3，2 和 2 至多 1 组相邻.

这样我们只能排成如下两种形式(或其对称形式)：

(a)1，4，__，__，__，3，1.

(b)1,4,1,3,—,—,—.

横线上的数字为两个 2,1 个 3.

对于(a),由(2)两个 2 不相邻,故只能为 1,4,2,3,2,3,1,显然有 3 组相邻之和为 5,矛盾.

对于(b),由(2)两个 2 不相邻,故只能有 1,4,1,3,2,3,2,同样会出现 3 组 5,矛盾.

从而,必存在正整数 k,使得方程 $a_i-a_j=k$ 至少有三组不同的解.

〖**证明** 2〗不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_8$,记 $d_i=a_{i+1}-a_i(i=1,2,\cdots,7)$,$b_i=a_{i+2}-a_i(i=1,2,\cdots,6)$共 13 个数,若不存在满足条件的 k,则这 13 个数中至多有两个 1,两个 2,两个 3,两个 4,两个 5,两个 6,从而

$$\sum_{i=1}^{7}d_i+\sum_{i=1}^{6}b_i\geqslant 2\cdot(1+2+3+4+5+6)+7\geqslant 49. \qquad ①$$

又
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{7}d_i+\sum_{i=1}^{6}b_i&=\sum_{i=1}^{7}(a_{i+1}-a_i)+\sum_{i=1}^{6}(a_{i+2}-a_i)\\&=(a_8-a_1)+(a_8+a_7-a_2-a_1)\\&=2(a_8-a_1)+(a_7-a_2)\\&\leqslant 2\cdot(17-1)+(16-2)=46.\end{aligned}$$

与①矛盾!

综上,存在正整数 k,使得方程 $a_i-a_j=k$ 至少有三组不同的解.

(ⅱ)〖**解**〗考察 S 的 7 元子集 $A=\{1,2,4,7,11,16,17\}$,它的 21 对元素的差值共有 1,3,5,6,9,10,15 各两个,2,4,7,12,13,14 各 1 个,没有 3 个差数有相同的值,故 A 即为一个所求子集.

〖**注**〗问题(ⅱ)中不同的选法有很多种,如{1,2,3,5,8,12,17}亦合乎要求.

5 非负实数 x,y,z 满足 $x+y+z=1$,求证:

$$x^2y+y^2z+z^2x\leqslant\frac{4}{27},$$

并确定等号成立的条件.

〖**证明**〗记 $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$,不妨设 $x\geqslant y,z$,则

$$\begin{aligned}&f\left(x+\frac{z}{2},y+\frac{z}{2},0\right)-f(x,y,z)\\&=\left(x+\frac{z}{2}\right)^2\left(y+\frac{z}{2}\right)-(x^2y+y^2z+z^2x)\\&=yz(x-y)+\frac{xz}{2}(x-z)+\frac{z^2y}{4}+\frac{z^3}{8}\geqslant 0.\end{aligned}$$

从而
$$f(x,y,z)\leqslant f\left(x+\frac{z}{2},y+\frac{z}{2},0\right)$$

$$=\left(x+\frac{z}{2}\right)^2\left(y+\frac{z}{2}\right)=\left(x+\frac{z}{2}\right)^2\left[1-\left(x+\frac{z}{2}\right)\right]$$

$$=t^2(1-t)=4\cdot\frac{t}{2}\cdot\frac{t}{2}(1-t)\left(令\ t=x+\frac{z}{2}\right)$$

$$\leqslant 4\left[\frac{\frac{t}{2}+\frac{t}{2}+(1-t)}{3}\right]^3=\frac{4}{27}.$$

当且仅当$\frac{t}{2}=1-t$即$t=\frac{2}{3}$且$z=0$时取等号.

即$x=\frac{2}{3}$,$y=\frac{1}{3}$,$z=0$时,等号成立(由对称性,$(x,y,z)=\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$,$\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right)$时等号也成立).

第 32 届加拿大数学奥林匹克(2000)

1 中午 12:00,Anne,Beth 和 Carmen 从同一地点沿着 300 米长的环形跑道跑步.每人匀速地在无限的时间内以两种可能的方向奔跑.证明:如果 Anne 的速度不同于其他两人,那么在以后某一时刻,Anne 与其他两人至少保持 100 米远的距离(这里"距离"是以离二者较近的弧长计算的)

【**证明 1**】考虑三人的相对速度,我们可以假定 Anne 的速度为 0,Beth 的速度不小于 Carmen,Carmen 的速度为正.如果 Beth 的速度不及 Carmen 速度的两倍,那么当 Carmen 跑完 100 米时,二人离 Anne 至少 100 米远;如果 Beth 的速度超过 Carmen 速度的两倍,那么当 Carmen 跑的路程在 100~200 米之间时,Beth 所跑的路程超过 200 米,这一段路程中有一部分离 Anne100 多米,那么在这一段路程的某一时刻,Beth 和 Carmen 离 Anne 都至少 100 米远.

【**证明 2**】考虑三人的相对速度,我们可以假定 Anne 的速度为 0,其他二人的速度不为 0.设 Beth 的速度不小于 Carmen,Beth 用了 t 秒的时间跑完 200 米.那么无限集 $T=\{t,2t,4t,8t,\cdots\}$ 的各时刻,Beth 离 Anne 恰好 100 米.在 t 时刻,Carmen 跑的路程为 d 米,则 $0<d\leqslant 200$.设 k 是满足 $2^k d\geqslant 100$ 的最小整数,那么 $k\geqslant 0$,且 $100\leqslant 2^k d\leqslant 200$.因此,在时刻 $2^k t\in T$ 时,Beth 和 Carmen 离 Anne 都有至少 100 米远.

2 数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 是整数 1901,1902,…2000 的一个排列.定义部分和数列

$$S_1=a_1,S_2=a_1+a_2,\cdots,S_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}.$$

若数列 $\{S_n\}$ 中每一项 $S_i(1\leqslant i\leqslant 100)$ 均不被 3 整除,则满足条件的数列 $\{a_n\}$ 有多少个?

【**解**】令 $\{1901,1902,\cdots,2000\}=R_0\cup R_1\cup R_2$.这里 R_i 里的任意元素模 3 同余于 $i(i=0,1,2)$.则 $|R_0|=|R_1|=33,|R_2|=34$.

由于任一个排列 $s=(a_1,a_2,\cdots,a_{100})$ 的部分和是否被 3 整除由排列 $s'=(a'_1,a'_2,\cdots,a'_{100})$ 的部分和所决定,其中 a'_i 是 a_i 模 3 的余数(共有 33 个 0,33 个 1,34 个 2).因为 s 的部分和仅仅依赖于其余数构成的数列 s'.欲使 s' 中每一部分和均不能被 3 整除,则由 s 中 67 个 1 和 2 构成的数列应为 1,1,2,1,2,…1,2 或 2,2,1,2,1,…,2,1.但 $|R_2|=|R_1|+1$,故只有第二种情形才可能.s' 中的 33 个 0 除了 $a'_1\neq 0$.可放在其他任何地方,这样有

$$C_{99}^{33}=\frac{99!}{33!\ 66!}$$

种方式.因此,满足条件要求的数列共有

$$C_{99}^{33}\cdot 33!\ \cdot 33!\ \cdot 34!\ =\frac{99!\ 33!\ 34!}{66!}\text{个}.$$

3 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2000}\}$ 是一个整数数列，其中 $a_i\in[-1000,1000]$. 若 $a_1+a_2+\cdots+a_{2000}=1$，求证：存在 A 的一个非空子数列，其和为 0.

【证明】若 $a_i=0(1\leqslant i\leqslant 2000)$，则集合 $\{a_i\}$ 即为满足条件的子集，下设 $a_i\neq 0$.

令 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{2000}\}$ 是数列 A 的一个重排数列，其中 b_i 取自 A，$b_1>0$，$b_2<0$，且对每个 $i=2,3,\cdots,2000$，b_i 的符号与 $S_{i-1}=b_1+b_2+\cdots+b_{i-1}$ 相反（可假定每个 $S_{i-1}\neq 0$，否则问题得证）.

我们可证这样的 B 是存在的. 事实上，由于 $a_1+a_2+\cdots+a_{2000}=1$，因此，$A$ 中每一次挑选后剩下来的项之和或者为 0，或者与 S_{i-1} 有相反的符号，所以每一个这样的 b_i 总是存在的.

由以上定义可知，每个 $S_1,S_2,\cdots,S_{2000}$ 都属于区间 $[-999,1000]$ 中的 1999 个非零整数中的某一个. 由抽屉原理知，至少有两个是相等的，设 $S_j=S_k(1\leqslant j<k\leqslant 2000)$，这样 $b_{j+1}+b_{j+2}+\cdots+b_k=0$. 证毕.

4 凸四边形 $ABCD$ 满足

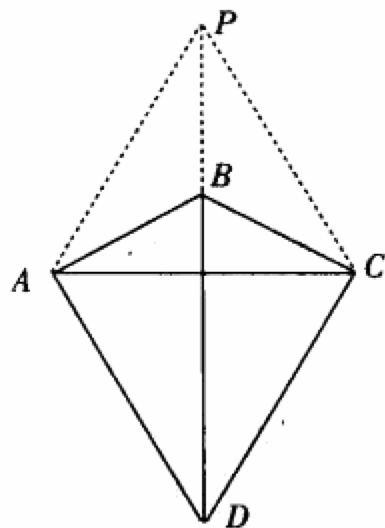
$$\angle CBD=2\angle ADB,\angle ABD=2\angle CDB,AB=CB.$$

求证：$AD=CD$.

【证明 1】以 B 为圆心，通过 A 和 C 作圆与 DB 的延长线交于 P. 则

$$\angle CPD=\frac{1}{2}\angle CBD=\angle ADB,$$

$$\angle APD=\frac{1}{2}\angle ABD=\angle CDB,$$



2000.4.1 图

于是，四边形 $APCD$ 为平行四边形.

所以 PD 平分 AC，BD 是等腰 $\triangle ABC$ 的角平分线，于是有

$$\angle ADB=\frac{1}{2}\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABD=\angle CDB.$$

所以 DB 是 $\angle ADC$ 的平分线，又 DB 是 $\triangle ADC$ 的底边的中线，所以，$\triangle ADC$ 为等腰三角形，则 $AD=CD$.

【证明 2】设 $\angle ABD$ 的平分线交 AD 于 E，$\angle CBD$ 的平分线交 CD 于 F，则

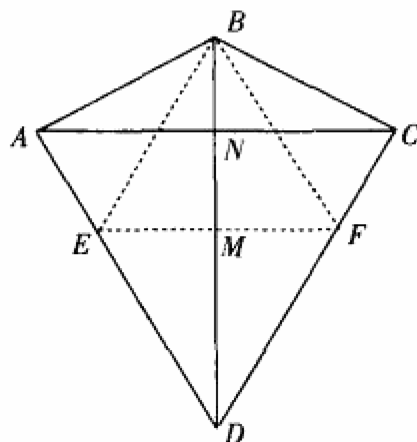
$$\angle FBD=\angle BDE,\angle EBD=\angle BDF,$$

所以 $BE/\!/FD$，$BF/\!/ED$. 从而 $BEDF$ 为平行四边形，且 BD 交 EF 于中点 M.

另一方面，因 BE 是角平分线，故有

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AE}{DE},\text{同理 }\frac{CB}{BD}=\frac{CF}{DF}.$$

由条件 $AB=CB$ 得$\frac{AE}{DE}=\frac{CF}{DF}$,从而 $EF /\!/ AC$.



2000.4.2 图

所以$\triangle DEF \backsim \triangle DAC$.

由上证知 BD 交 AC 于中点 N,又因为$\triangle ABC$ 是等腰三角形,所以 $AC \perp BD$,从而$\triangle NAD$,$\triangle NCD$ 都是直角三角形,且有一条直角边是公共的,则$\triangle NAD \cong \triangle NCD$,从而 $AD=CD$.

5 已知实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 满足

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{100} \geqslant 0,$$

$$a_1+a_2 \leqslant 100,$$

$$a_3+a_4+\cdots+a_{100} \leqslant 100.$$

求 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2$ 的最大值,并求出达到最大值时的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$.

〖**解**〗因为 $a_1+a_2+\cdots+a_{100} \leqslant 200$,所以

$$\begin{aligned}
& a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2 \\
\leqslant & (100-a_2)^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{100}^2 \\
= & 100^2-200a_2+2a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{100}^2 \\
\leqslant & 100^2-(a_1+a_2+\cdots+a_{100})a_2+2a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{100}^2 \\
= & 100^2+(a_2^2-a_1a_2)+(a_3^2-a_3a_2)+\cdots+(a_{100}^2-a_{100}a_2) \\
= & 100^2+(a_2-a_1)a_2+(a_3-a_2)a_3+\cdots+(a_{100}-a_2)a_{100},
\end{aligned}$$

因为 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{100} \geqslant 0$,

所以$(a_2-a_1)a_2, (a_3-a_2)a_3, \cdots, (a_{100}-a_2)a_{100}$ 均非正.

所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2 \leqslant 10000$,且等号成立时当且仅当

$$a_1=100-a_2, a_1+a_2+\cdots+a_{100}=200,$$

及 $(a_2-a_1)a_2, (a_3-a_2)a_3, (a_4-a_2)a_4, \cdots, (a_{100}-a_2)a_{100}$ 都为 0.

因为 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_{100} \geqslant 0$,最后一个条件成立时当且仅当 $i \geqslant 1$ 时,$a_1=a_2=\cdots=a_i$,且 $a_{i+1}=\cdots=a_{100}=0$.

若 $i=1$,则达到最大值时的数列为 100,0,0,…,0;

若 $i \geqslant 2$,则由 $a_1+a_2=100$,有 $i=4$,于是对应的数列为 50,50,50,50,0,0,…,0.

综上,$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2$ 的最大值是 10000,达到最大值时的数列为 100,0,0,…,0 或 50,50,50,50,0,0,…,0.

第 33 届加拿大数学奥林匹克(2001)

1　给定整系数二次函数 $f(x)$，满足以下条件：

(1) $f(x)$ 的各系数之和为素数；

(2)方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的正整数解；

(3)存在正整数 t，使得 $f(t)=-55$.

(ⅰ)求证：方程 $f(x)$ 的较小根为 2；

(ⅱ)求方程 $f(x)=0$ 的较大根.

(ⅰ)【**证明**】设方程 $f(x)=0$ 的两根分别为 R 和 J $(R>J>0)$，则

$$f(x)=a(x-R)(x-J)=ax^2-a(R+J)x+aRJ.$$

从而各项系数的和为

$$a-a(R+J)+aRJ=a(R-1)(J-1).$$

注意到 $a(R-1)(J-1)$ 是素数，且 $R>J>0$，则必有

$$a=1, J-1=1, R-1 \text{ 为素数}.$$

故 $a=1, J=2$，即方程的较小根为 2.

(ⅱ)【**解**】由(ⅰ)知，　$f(x)=(x-R)(x-2)$.

注意到 $f(t)=-55=-5\cdot 11=(t-R)(t-2)$，且 $R>2$，故 $t-R$ 一定是负数. 我们有下列四种情况：

(a) $t-R=-55, t-2=1 \Rightarrow t=3, R=58$；

(b) $t-R=-11, t-2=5 \Rightarrow t=7, R=18$；

(c) $t-R=-5, t-2=11 \Rightarrow t=13, R=18$；

(d) $t-R=-1, t-2=55 \Rightarrow t=57, R=58$.

因为 $R-1$ 是素数，所以只有(b)，(c)符合要求，因此 $R=18$.

2　将 -10 到 10 填写到如下图所示的方格中，每个方格均被染成红色或白色，红色方格中的数字之和为 n，莫林把一个代币放在方格 0 上，她扔硬币 10 次，每次扔出人头，就把代币向右移动一格，扔出字，就把代币向左移动一格. 最后代币落在红色方格上的概率为有理数 $\frac{a}{b}$ (a,b 为正整数，$(a,b)=1$[1]，且 $a+b=2001$). 求 n 的最大可能值.

−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

[1] 原题中无此条件，参赛同学给出了两种不同的解答，具体参看评注.

【解】经过 10 次扔硬币后，代币落在方格 $2k-10$ 上，k 是扔出人头的次数. 由于总共有 $2^{10}=1024$ 种结果，而扔出 k 次人头的结果是 C_{10}^{k} 种，故代币最后落在方格 $2k-10$ 的概率是 $\frac{C_{10}^{k}}{1024}$. 从而最后落在红色方格的概率是 $\frac{c}{1024}$，这里 c 是下列 11 个数中部分数字的和

$$C_{10}^{0},C_{10}^{1},C_{10}^{2},C_{10}^{3},C_{10}^{4},C_{10}^{5},C_{10}^{6},C_{10}^{7},C_{10}^{8},C_{10}^{9},C_{10}^{10}$$
$$=1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1. \tag{1}$$

由题知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{1024}$，$(a,b)=1$，$a+b=2001$.

因为 $0\leqslant\frac{a}{b}\leqslant 1$，$a+b=2001$，故 $1001\leqslant b\leqslant 2001$. 又 $b\mid 1024$，故

$$b=1024,a=c=2001-1024=977.$$

(1)中数字和为 977 只有一种情况

$$977=10+10+45+120+120+210+210+252. \tag{2}$$

(这很容易得出，因为 $1024-977=47$，而 $47=45+1+1$).

要使 n 值最大，必须按照下列方法染色：

正奇数所在方格染红色，负奇数所在方格染白色.

又 $252=C_{10}^{5}$ 在和式(2)中，故方格 $2\cdot 5-10=0$ 也染红色.

对 $k=0,1,2,3,4$：

若 C_{10}^{k} 在和式(2)中出现 2 次，则方格 $2k-10$ 和 $10-2k$ 都染红色.

若 C_{10}^{k} 在和式(2)中不出现，则方格 $2k-10$ 和 $10-2k$ 都染白色.

若 C_{10}^{k} 在和式(2)中只出现一次，则方格 $10-2k$ 染红色，方格 $2k-10$ 染白色.

从而当下列数字$\{1,3,5,7,9,-8,8,-4,4,-2,2,0,6\}$所在方格染红色时，$n$ 有最大值 31.

【评注】若题中不假设 a,b 互素，则还有几种可能性.

因为 a,b 的最大公约数能整除 $2001=3\cdot 23\cdot 29$，故 $\gcd(a,b)$ 是下列数中之一：$1,3,23,29,3\cdot 23,3\cdot 29,23\cdot 29,3\cdot 23\cdot 29$.

又 $\frac{a}{b}=\frac{c}{1024}$，故用 $\gcd(a,b)$ 除 b 得到 2 的幂的形式，从而 b 的素因式分解是下列形式之一：

$$2^{k},3\cdot 2^{k},23\cdot 2^{k},29\cdot 2^{k},69\cdot 2^{k},87\cdot 2^{k},667\cdot 2^{k},2001.$$

又由 $1001\leqslant b\leqslant 2001$ 可得 b 是下列数之一：

$1024,3\cdot 512=1536,23\cdot 64=1472,29\cdot 64=1856,$

$69\cdot 16=1104,87\cdot 16=1392,667\cdot 2=1334,2001.$

从而 $\frac{a}{b}=\frac{2001-b}{b}$ 是下列分数之一：

$$\frac{977}{1024},\frac{465}{1536},\frac{529}{1472},\frac{145}{1856},\frac{897}{1104},\frac{609}{1392},\frac{667}{1334},\frac{0}{2001}.$$

故 $c=\frac{1024a}{b}$ 是下列数之一：977,310,368,80,832,448,512,0.

经过计算可得，只有下列几种(1)中数字的和构成可能的 c 值.

$977=10+10+45+120+120+210+210+252$;

$310=10+45+45+210$;

$512=10+10+120+120+252$;

$512=1+1+45+45+210+210$;

$0=0$.

又因为和式中只出现一次的数对 n 的最大值有影响，我们作表如下：

c	和式中只出现一次的数	对应的红色方格中数字
977	{45,252}	{6,0}
310	{10,210}	{8,2}
512	{252}	{0}
512	$\varnothing$	$\varnothing$
0	$\varnothing$	$\varnothing$

显然，当 $c=310=C_{10}^{2}+C_{10}^{6}+C_{10}^{8}+C_{10}^{9}$ 时，n 值最大，此时红色方格中数字是{1,3,5,7,9,−6,6,2,8}.

故最后代币落在红色方格的概率 $\frac{a}{b}=\frac{465}{1536}=\frac{310}{1024}=\frac{155}{512}$，$n=35$.

3 在△ABC 中，$AC>AB$，P 是 BC 的垂直平分线和∠A 的角平分线的交点，X 是 AB 延长线上的点，Y 是 AC 上的点，并且 $PX\perp AB$，$PY\perp AC$，XY 和 BC 交于点 Z，求 $\frac{BZ}{ZC}$ 的值.

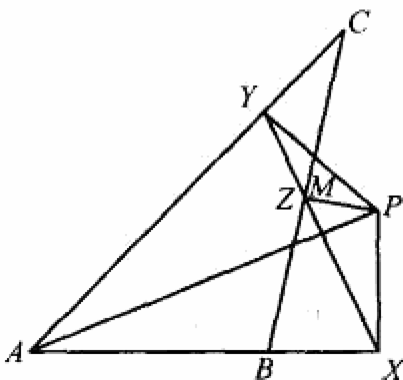
〖解 1〗设△ABC 的外心为 O，BC 的中点为 M，∠BAC 的角平分线交此圆于点 R，则有

$$\angle BOR=2\angle BAR=2\angle CAR=\angle COR.$$

故 $BR=CR$，且 R 在 BC 的垂直平分线上.

从而 $R=P$，且 A,B,C,P 共圆.

因为 X,Y,M 分别是点 P 在△ABC 的边或其延长线上的射影，故由西姆松定理可得 X,Y,M 三点共线. 从而 $M=Z$，$\frac{BZ}{ZC}$



2001.3 图

$=\dfrac{BM}{MC}=1.$

〖解 2〗因为$\angle PAX=\angle PAY$，$\angle PXA=\angle PYA=90^\circ$，故$\triangle PAX\cong\triangle PAY$，从而

$$AX=AY, PX=PY.$$

又 P 在 BC 的垂直平分线上，故 $PC=PB$.

从而$\triangle PYC\cong\triangle PXB$，且 $CY=BX$.

注意到直线 XYZ 截$\triangle ABC$，由梅内劳斯定理可得

$$\frac{AY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XA}=-1.$$

再由 $AX=AY$，$CY=BX$ 可得$\dfrac{BZ}{ZC}=1$.

4 n 是正整数，现有一矩阵，其各元素均为正整数，对这个矩阵可作以下两种操作：

(a)将某一行的元素都乘以 n；

(b)将某一列的元素都减去 n.

求所有可能的 n 值，使得对给定的任何矩阵，在经过有限次上述操作后，其中元素全部变为 0.

〖解〗n 只能为 2.

首先证明当 $n\neq 2$ 时，$T_0=\begin{pmatrix}1\\n-1\end{pmatrix}$不能转换为$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

当 $n=1$ 时，结论显然.

当 $n\geqslant 3$ 时，对任意矩阵 $T=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，令 $d(T)=b-a\pmod{n-1}$.

我们来证上面两种操作都不能改变 $d(T)$的值.

若把 T 中两项都减去 n，则 $b-a$ 不变；

若把第一行乘以 n，则 a 变为 na，

$$b-na\equiv b-a-(n-1)a\equiv b-a\pmod{n-1}.$$

同理，把第二行乘以 n 也不会改变 $d(T)$的值.

又因为 $d(T_0)=(n-1)-1\equiv-1\pmod{n-1}$，而 $0-0\not\equiv-1\pmod{n-1}$，故 T_0 不能转换为$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

下证，当 $n=2$ 时，对任意矩阵，经下述操作，其中元素可全变为 0.

(我们的目标是先把第一列的元素全变为 0)

将第一列的元素全部减去 2，重复这个变换，直到这一列中至少有一个元素是 1 或 2. 然后重复以下三步：

(1)把第一列是 1 的行全部乘以 2;

(2)把第一列是 2 的行全部乘以 2(至少有一个);

(3)把第一列全部减去 2.

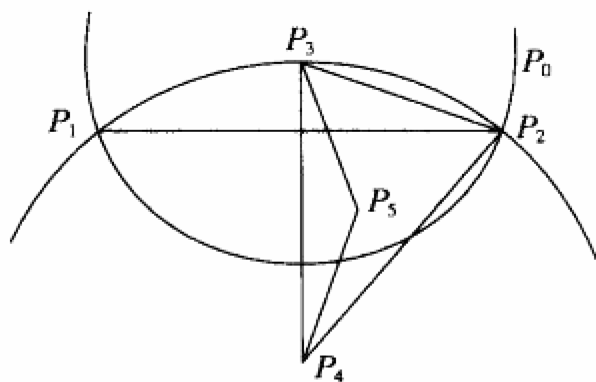
上面每一步都把第一列中大于 2 的元素变小,从而最后第一列中元素全是 1 和 2.这时再用一次(1)和(3),可得到一列的 0,对剩余的每一列依次序重复以上步骤,由于上述变换对全部是 0 的列没有影响,故最后可得到一个元素全部是 0 的矩阵.

5 半径为 1 的圆上三点 P_0,P_1,P_2 满足 $P_1P_2=t<2$,定义 P_i 是$\triangle P_{i-1}P_{i-2}P_{i-3}$的外接圆圆心($i\geqslant 3$).

(i)证明 $P_1,P_5,P_9,P_{13},\cdots$共线;

(ii)令 $P_1P_{1001}=x,P_{1001}P_{2001}=y$,求使$\sqrt[500]{\frac{x}{y}}$是整数的 t 值.

(i)【**证明**】令$\angle P_1P_3P_2=2\alpha$,由$\triangle P_1P_2P_3$ 是等腰三角形可得 $t=P_1P_2=2\sin\alpha$,且 P_3P_4 垂直平分 P_1P_2.



2001.5.1 图

又由$\triangle P_2P_3P_4$ 是等腰三角形可得

$$P_3P_4=\frac{\frac{P_2P_3}{2}}{\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha}.$$

因为 P_5 是$\triangle P_2P_3P_4$ 的外心,所以

$\angle P_3P_5P_4=2\angle P_3P_2P_4=2\angle P_2P_3P_4=2\alpha$.

从而$\triangle P_3P_4P_5\backsim\triangle P_1P_2P_3$.

又 $P_3P_4\perp P_1P_2$,故$\angle P_1P_3P_5=90^\circ$.

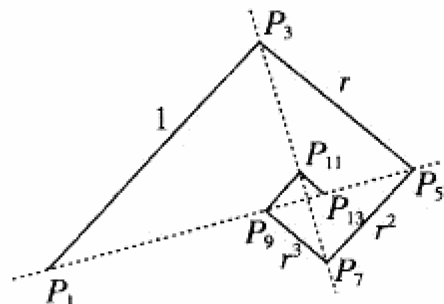
由相似还可得到

$$\frac{P_3P_5}{P_1P_3}=\frac{P_3P_4}{P_1P_2}=\frac{1}{(2\sin\alpha)\cdot(2\cos\alpha)}=\frac{1}{2\sin 2\alpha}=r.$$

同理可得$\angle P_iP_{i+2}P_{i+4}=90^\circ$,

$$\frac{P_{i+2}P_{i+4}}{P_iP_{i+2}}=r(i\geqslant 3).$$

从而 $P_1,P_3,P_5,\cdots$在以 4 为周期,r 为比值的对数螺线上,于是 $P_1,P_5,P_9,P_{13},\cdots$共线.



2001.5.2 图

(ii)【**解**】由对数螺线的自我相似可得

$$P_1P_{1001}=r^{500}P_{1001}P_{2001},$$

从而
$$\sqrt[500]{\frac{x}{y}}=\frac{1}{r}=2\sin 2\alpha.$$

当 $\sin 2\alpha \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\}$ 时，$\sqrt[500]{\frac{x}{y}}$ 为整数.

由于 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$，故当 $\alpha \in \{15^\circ, 45^\circ, 75^\circ\}$ 时，即 $t \in \{2\sin 15^\circ, 2\sin 45^\circ, 2\sin 75^\circ\}$ 时，$\sqrt[500]{\frac{x}{y}}$ 为整数.

第34届加拿大数学奥林匹克(2002)

1　集合{1,2,…,9}的子集 S 满足其中每一个无序数对的和均不同,例如:{1,2,3,5}有这种性质,{1,2,3,4,5}则没有,因为{1,4}和{2,3}的和均为5.问 S 中最多含有几个元素.

【解1】可以得出{1,2,3,5,8}中的数对的和均不同.

假设 S 中含有6个元素,由于 S 中最小的数对的和可能是 $1+2=3$,最大的数对的和可能是 $8+9=17$,故 S 中的数对和共有15种可能:3,4,…,17.

而 S 中共有 $C_6^2=15$ 对数,故3,4,…,17均是 S 中数对的和.

又和是3的只有{1,2},和是17的只有{8,9},故1,2,8,9都在 S 中.而 $1+9=2+8$,矛盾!

从而,S 中最多只能有5个元素.

【解2】可以得出{1,2,3,5,8}中的数对的和均不同.

假设 S 中有6个元素 $a_1<a_2<\cdots<a_6$.

因为 $a_1+a_6\neq a_2+a_5$,故 $a_6-a_5\neq a_2-a_1$.同理,

$$a_6-a_5\neq a_4-a_3,a_4-a_3\neq a_2-a_1.$$

所以,

$$(a_6-a_5)+(a_4-a_3)+(a_2-a_1)\geqslant 1+2+3=6. \tag{1}$$

同理可得 $a_3-a_2\neq a_5-a_4$,从而

$$(a_3-a_2)+(a_5-a_4)\geqslant 1+2=3. \tag{2}$$

(1)+(2),得

$$a_6-a_5+a_5-a_4+a_4-a_3+a_3-a_2+a_2-a_1\geqslant 6+3=9.$$

即 $a_6-a_1\geqslant 9$,而 S 中的元素在1到9之间,不可能有 $a_6-a_1\geqslant 9$,矛盾!

从而,S 中最多只能有5个元素.

2　如果每一个不超过正整数 n 的正整数都可以写成 n 的不同因子的和,则称 n 为"好数".例如6的因子有1,2,3,6.因为

$$1=1,2=2,3=3,4=1+3,5=2+3,6=6,$$

所以说6是"好数".证明:两个"好数"的乘积也是"好数".

【证明】设 p,q 是"好数",对任意 $k\leqslant pq$,可设

$$k=aq+b,0\leqslant a\leqslant p,0\leqslant b\leqslant q.$$

又因为 p 和 q 是"好数",故可令

$$a=c_1+c_2+\cdots+c_m,b=d_1+d_2+\cdots+d_n,$$

其中 c_i 是 p 的因子，d_j 是 q 的因子，此时

$$k=(c_1+c_2+\cdots+c_m)q+(d_1+d_2+\cdots+d_n)$$
$$=c_1q+c_2q+\cdots+c_mq+d_1+d_2+\cdots+d_n.$$

这里 c_iq 和 d_j 都是 pq 的因子.

又因为 $d_j<q\leqslant c_iq$，故 c_iq 和 d_j 都是不同的，从而 pq 是"好数".

3　证明：对任意正实数 a,b,c，有

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geqslant a+b+c,$$

并求出取等号的条件.

〖**证明 1**〗注意到

$$a^4+b^4+c^4=\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}$$
$$\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$
$$=\frac{a^2(b^2+c^2)}{2}+\frac{b^2(c^2+a^2)}{2}+\frac{c^2(a^2+b^2)}{2}$$
$$\geqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab.$$

两边同时除以 abc 得到

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geqslant a+b+c,$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

〖**证明 2**〗注意到若用 ka,kb,kc 分别替换 a,b,c，依然可以得到原不等式，故不失一般性，假设 $abc=1$，则

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}=abc\left(\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\right).$$

从而只需证明　　$a^4+b^4+c^4\geqslant a+b+c.$

由幂平均不等式得

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{3}\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4.$$

即　　$$a^4+b^4+c^4\geqslant(a+b+c)\cdot\frac{(a+b+c)^3}{27}.$$

由均值不等式有　　$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}=1.$$

故　　$$a+b+c\geqslant 3.$$

从而　　$$a^4+b^4+c^4\geqslant(a+b+c)\cdot\frac{(a+b+c)^3}{27}$$

$$\geqslant(a+b+c)\cdot\frac{3^3}{27}=a+b+c,$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

4 已知⊙O 半径为 r, A, B 是⊙O 上不同的点,且 $AB<\sqrt{3}r$,以 B 为圆心,AB 为半径作圆交⊙O 于点 C. P 是⊙O 内一点,△ABP 为正三角形,CP 的延长线交⊙O 于点 Q. 证明:$PQ=r$.

【**证明 1**】由 $BP=BC$,知$\angle BPC=\angle BCP$,记$\angle BCP=\theta$.

注意到四边形 $QABC$ 内接于⊙O,故

$$\angle BAQ=180^\circ-\theta\Rightarrow\angle PAQ=120^\circ-\theta.$$

又 $$\angle APQ=180^\circ-\angle APB-\angle BPC=120^\circ-\theta.$$

$\therefore PQ=AQ$ 且$\angle AQP=2\theta-60^\circ$.

则 $$\angle ABC=180^\circ-\angle AQC=240^\circ-2\theta.$$

又$\because OA=OB=OC=r, AB=BC$, $\therefore$ △$OAB\cong$△OCB.

$\therefore$ $\angle ABO=\angle CBO=\frac{1}{2}\angle ABC=120^\circ-\theta$.

$\because\angle PAQ=\angle BAO=\angle APQ=\angle ABO, AP=AB$,

$\therefore$ △$AQP\cong$△AOB, $\therefore$ $QP=OB=r$.

【**证明 2**】因为 A, P, C 都在以 B 为圆心的圆上,所以

$$60^\circ=\angle ABP=2\angle ACP\Rightarrow\angle ACP=30^\circ.$$

$\because Q, A, C$ 都在⊙O 上,$\therefore\angle QOA=2\angle QCA=60^\circ$, $\therefore QA=r$.

$\because BP=BC$, $\therefore\angle BPC=\angle BCP=\angle ACB+30^\circ$,

$\therefore\angle APQ=180^\circ-\angle APB-\angle BPC=90^\circ-\angle ACB$.

$\because Q, A, B, C$ 都在⊙O 上,且 $AB=BC$,

$\therefore\angle AQP=\angle AQC=\angle AQB+\angle BQC=2\angle ACB$.

$\therefore\angle QAP=180^\circ-\angle AQP-\angle APQ=90^\circ-\angle ACB$,

$\therefore\angle APQ=\angle QAP$, $\therefore PQ=AQ=r$.

5 已知 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$,求所有满足下列条件的函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$:

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2).$$

【**解 1**】我们可以得出 f 是常数函数. 用反证法.

假设存在 $x, y\in\mathbf{N}$ 使得 $f(x)<f(y)$,则有 $f(y)-f(x)>0$. 选择 x, y,使得 $f(y)-f(x)$的值是最小的,则

$$f(x)=\frac{xf(x)+yf(x)}{x+y}<\frac{xf(y)+yf(x)}{x+y}<\frac{xf(y)+yf(y)}{x+y}=f(y).$$

即 $$f(x)<f(x^2+y^2)<f(y).$$

从而 $$0<f(x^2+y^2)-f(x)<f(y)-f(x).$$

与前设最小性矛盾！故 f 是常数函数.

又 $f(0)\in\mathbf{N}$，所以这个常数也在 $\mathbf{N}$ 中. 又对任意的 $c\in\mathbf{N}$，$xc+yc=(x+y)c$ 都成立，所以 $f(x)=c,c\in\mathbf{N}$ 是满足题意的函数.

【解 2】我们证明 f 是常数函数.

定义 $g(x)=f(x)-f(0)$，则

$$g(0)=0,g(x)\geqslant -f(0).$$

且 $$xg(y)+yg(x)=(x+y)g(x^2+y^2).$$

令 $y=0$ 得到 $g(x^2)=0$.（特别的 $g(1)=g(4)=0$）

令 $x=y=1$ 得到 $g(2)=0$.

同样，若 $x,y,z\in\mathbf{N}$ 满足 $x^2+y^2=z^2$，则有

$$g(y)=-\frac{y}{x}g(x). \qquad (*)$$

令 $x=4,y=3$，得到 $g(3)=0$.

对一切偶数 $x=2n>4$，令 $y=n^2-1$，则 $y>x$ 且 $x^2+y^2=(n^2+1)^2$.

对一切奇数 $x=2n+1>3$，令 $y=2(n+1)n$，则 $y>x$ 且

$$x^2+y^2=((n+1)^2+n^2)^2.$$

因此对一切 $x>4$，都存在 $y>x$ 满足（$*$）式.

假设存在 $x>4$，使得 $g(x)>0$，则可得到一组 $x=x_0<x_1<x_2<\cdots$ 满足 $g(x_{i+1})=-\frac{x_{i+1}}{x_i}g(x_i)$.

从而 $|g(x_{i+1})|>|g(x_i)|$ 且 $g(x_i)$ 的符号是交替的.

因为 $g(x)$ 是整数，故 $|g(x_{i+1})|>|g(x_i)|+1$.

从而当 i 足够大时，有 $g(x_i)<-f(0)$. 矛盾！

由解法 1 得，满足题意的函数为 $f(x)=c,c\in\mathbf{N}$.

第 35 届加拿大数学奥林匹克(2003)

1 在一个标准的时钟上,时针和分针连续转动.设 m 是整数,且 $1\leqslant m\leqslant 720$.当前是 12:00 过 m 分钟,时针和分针的夹角恰为 $1°$.试确定 m 的所有可能值.

【**解 1**】注意到每 1 个小时,时针转过 $30°$而分针转过 $360°$,故分针的角速度为时针的 12 倍.

由于时钟上每两个相邻的刻度恰隔 $30°$,可以设此刻时针与刻度 12 的夹角 $\alpha=30°\cdot k+\beta$,其中 $0\leqslant k\leqslant 11$,$0\leqslant\beta<30°$,且 $k,\beta\in\mathbf{N}$.因此有

$$30°\cdot k+\beta\pm 1°=12\cdot\beta.$$

即

$$30°\cdot k\pm 1°=11\beta.$$

不难得到上述方程的满足条件的整数解(k,β)为$(4,11)$或$(7,19)$,所以

$$m=60k+2\beta=262\text{ 或 }458.$$

【**解 2**】令 $m=60k+r$,其中 $k=\left[\frac{m}{60}\right]$,$0\leqslant r\leqslant 59$,$0\leqslant k\leqslant 12$,$k\in\mathbf{N}$.

由题意,有

$$\left|\frac{60k+r}{720}\times 360°-\frac{r}{60}\times 360°\right|=1°.$$

故

$$|60k-11r|=2.$$

解得,$(k,r)=(4,22)$或$(7,38)$.此时,$m=262$ 或 458.

2 求 $2003^{2002^{2001}}$ 的最末三位数字.

【**解**】设 $N=2002^{2001}$,问题即是求 2003^N 除以 1000 所得的余数.

由于 $2003^N\equiv 3^N\pmod{1000}$,下面先来求 1 个 n,使得 $3^n\equiv 1\pmod{1000}$,这样,将 2002^{2001} 写为 $nk+r$ 的形式,便有:

$$2003^N\equiv 3^{nk+r}\equiv(3^n)^k\cdot 3^r\equiv 3^r\pmod{1000}.$$

因为 $3^2=10-1$,利用二项式展开,有

$$\begin{aligned}3^{2m}&=(10-1)^m\\&=(-1)^m+10m\cdot(-1)^{m-1}+100\cdot\frac{m(m-1)}{2}(-1)^{m-2}+\cdots+10^m.\end{aligned}$$

可见,除开头的三项外,其余每一项皆为 1000 的倍数,令 $m=2q$,则

$$3^{4q}\equiv 1-20q+100q(2q-1)\pmod{1000}\tag{1}$$

因此,$3^{100}\equiv 1\pmod{1000}$.故只要确定 2002^{2001} 除以 100 所得的余数即可.由于

$$2002^{2001}\equiv 2^{2001}\pmod{100}\equiv 4\cdot 2^{1999}\pmod{4\cdot 25}.$$

又 $2^{10}=1024\equiv -1\pmod{25}$,所以

$$2^{1999}=(2^{10})^{199}\cdot 2^9\equiv(-1)^{199}\cdot 512\equiv -12\equiv 13\pmod{25},$$

$$2^{2001} \equiv 4 \cdot 13 = 52 \pmod{100}.$$

即 2002^{2001} 可以写成 $100k+52$ 的形式，其中 $k \in \mathbf{Z}$. 结合(1)式，有

$$2003^{2002^{2001}} \equiv 3^{52} \equiv 1-20 \cdot 13+1300 \cdot 25 \equiv 241 \pmod{1000}.$$

故所求的最末三位数字为 2,4,1.

3　求不定方程组：

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=x+y+z, \\ x^2+y^2+z^2=xyz \end{cases}$$

的所有正实数根 (x,y,z).

〖**解 1**〗因为 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$，所以

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz,$$

故
$$x+y+z \geqslant 3xyz.$$

又
$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \geqslant 3x^2y^2z^2,$$

则
$$xyz \geqslant 3x^2y^2z^2 \Rightarrow xyz \leqslant \frac{1}{3}. \tag{1}$$

又由 $xyz=x^2+y^2+z^2 \geqslant 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$，可得

$$xyz \geqslant 27. \tag{2}$$

(1)和(2)导致矛盾. 因此，此不定方程组无正实数根.

〖**解 2**〗若 $x,y,z \geqslant 1$，则有

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant x+y+z.$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时，等号成立.

但此时不满足第二个方程，故 x,y,z 中至少有一个小于 1，不妨设 $x<1$，则

$$x^2+y^2+z^2 > y^2+z^2 \geqslant 2yz > yz > xyz,$$

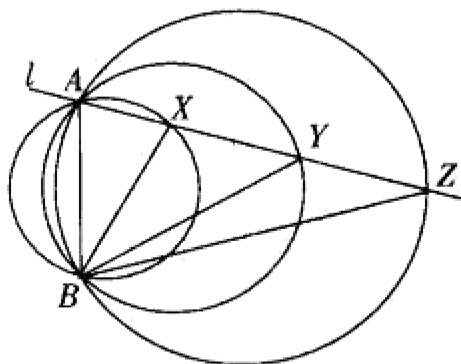
矛盾！这表明此不定方程组无正实数根.

〖**解 3**〗不妨设 $x \geqslant y \geqslant z > 0$，则

$$xyz = x^2+y^2+z^2 > x^2+y^2 \geqslant 2xy,$$

从而 $z>2$，则有 $x^3+y^3+z^3 > x+y+z$，从而方程组无正实数解.

4　给定三圆有公共弦 AB，X 是最小圆周上不同于 A 和 B 的一个动点. 直线 AX 与另两圆分别交于 Y 和 Z（Y 在 X 和 Z 之间）. 求证：比值 $\frac{XY}{YZ}$ 不随动点 X 的位置而改变.

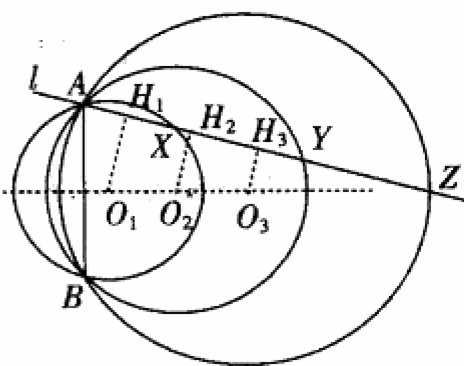


2003.4.1 图

〖**证明 1**〗如图所示，设 l 是不同于 AB 且过 A 的直线，l 与三个圆分别交于点 X,Y,Z.

显然，$\angle AXB$，$\angle AYB$，$\angle AZB$ 与 l 的选择无关.

因此，不论 l 如何选择，相应的三角形 BXY 与 BXZ 的各内角的大小都不改变. 所以当 X 取不同的位置时，得到的 $\triangle BXY$ 和 $\triangle BXZ$ 均相似，所以比值 $\frac{XY}{YZ}$ 保持不变.



2003.4.2 图

【证明 2】记三圆圆心分别为 O_1, O_2, O_3，注意到 AB 为三圆公共弦，则 O_1, O_2, O_3 共线，分别过 O_1, O_2, O_3 作 l 的垂线交 l 于点 H_1, H_2, H_3，易知

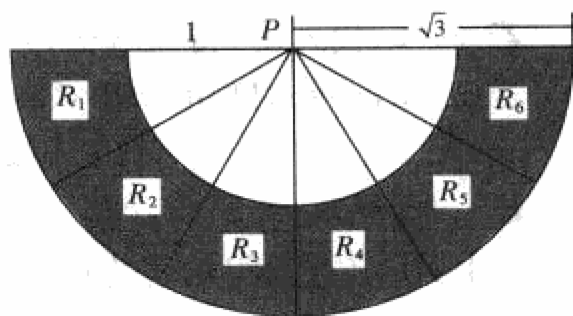
$$AX=2AH_1, AY=2AH_2, AZ=2AH_3.$$

从而，$\frac{XY}{YZ}=\frac{H_1H_2}{H_2H_3}=\frac{O_1O_2}{O_2O_3}$ 为定值.

5 S 是平面上 n 个不同的点组成的点集. S 中任意两点距离的最小值为 1. 证明：存在一个 S 的由至少 $\frac{n}{7}$ 个点组成的子集 T，T 中任意两点至少相距 $\sqrt{3}$.

【解】我们采用如下的方式构造 T：

假设 S 中的点在 xy 平面内，且点 P 是纵坐标最大的那个点，把 P 归入 T.



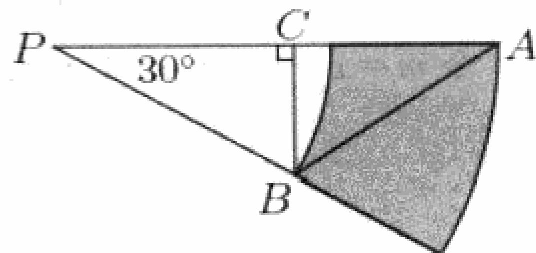
2003.5.1 图

现在去掉 P 和那些 S 中所有与点 P 的距离 $<\sqrt{3}$ 的点.

在剩下的那些点中，再取出纵坐标最大的点，将其归入 T，并去掉 S 中所有与此点相距 $<\sqrt{3}$ 的点. 以此类推，直到取尽 S 中所有的点.

显然，所有归入 T 的点，两两之间的距离 $\geqslant\sqrt{3}$.

为了证明 $|T|\geqslant\frac{n}{7}$，只需证明上述过程中的每一步，去掉的点的个数不会超过 6 个.



2003.5.2 图

注意到在每一步中，我们取了一个纵坐标最大的点 P，所以所有与 P 相距 $<\sqrt{3}$ 的点都在以 P 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的半圆内(见图 1)，而 S 中任意两点距离 $\geqslant 1$，所以它们又都在以 P 为圆心，1 为半径的半圆外. 故这些去掉的点都落在阴影部分中.(不包括虚线边界)

在将阴影部分分为如图 2 所示相同的 6 份. 如果去掉的点多于 6 个，由抽屉原理，至少有 2 个点落在同一区域内，不妨设为 R_1，如图 2，但区域 R_1 中任两点距离的最大值为 $AB=1$. 故落在 R_1 内的那两点间距 <1，矛盾！

第36届加拿大数学奥林匹克(2004)

1　求所有满足方程组

$$\begin{cases} xy=z-x-y, & ① \\ xz=y-x-z, & ② \\ yz=x-y-z & ③ \end{cases}$$

的三元实数组(x,y,z).

【解1】前两个方程相减,得

$$xy-xz=2z-2y \Rightarrow (x+2)(y-z)=0.$$

故$x=-2$或$y=z$.

若$x=-2$,代入①得$y+z=-2$,从而③即为$yz=(-2)-(-2)=0$,故$y=0$或$z=0$,得到方程组的解为

$$(x,y,z)=(-2,0,-2),(-2,-2,0).$$

若$y=z$,代入①,得$x(y+1)=0$,即$x=0$或$y+1=0$.

若$x=0,y=z$,则由③得$y^2=-2y$,从而$y=0$或$y=-2$.则

$$(x,y,z)=(0,0,0),(0,-2,-2).$$

若$y+1=0,y=z$,由③得$x=-1$,则$(x,y,z)=(-1,-1,-1)$.

综上,所求方程组的解为$(-1,-1,-1)$,$(0,0,0)$,$(0,-2,-2)$,$(-2,0,-2)$,$(-2,-2,0)$.

【解2】原方程组可化为$\begin{cases} (x+1)(y+1)=z+1 \\ (x+1)(z+1)=y+1, \\ (y+1)(z+1)=x+1. \end{cases}$

令$m=x+1,n=y+1,t=z+1$,则可得

$$\begin{cases} mn=t, & (1) \\ mt=n, & (2) \\ nt=m & (3) \end{cases}$$

若m,n,t有一个为0,则其余两个也必为0,从而$(0,0,0)$为新方程组的一组解.

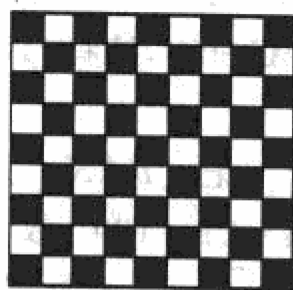
设m,n,t是非0实数,将(1)代入(2)、(3)得

$$\begin{cases} m\cdot mn=n, \\ n\cdot mn=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\pm 1, \\ n=\pm 1. \end{cases}$$

则得到新方程的解:$(1,1,1)$,$(1,-1,-1)$,$(-1,1,-1)$,$(-1,-1,1)$,故原方程组的解为$(-1,-1,-1)$,$(0,0,0)$,$(0,-2,-2)$,$(-2,0,-2)$,$(-2,-2,0)$.

2 将 8 个车放到如图的 9×9 棋盘中，使得这 8 个车互不攻击且所在小方格颜色相同，问共有多少种不同的方法.

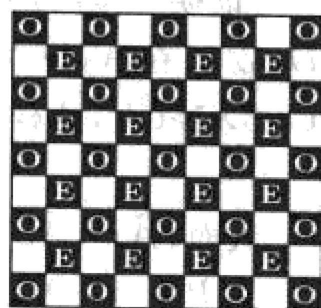
(两车互不攻击是指这两个车不同在任何一行或任何一列)



2004.2 题图

【解 1】如图，首先计算所有车都在黑格的放法数.

将棋盘中的黑格分为两类，一类是奇数行，一类是偶数行，分别用 O 和 E 标记，容易知道奇数行的车和偶数行的车互不攻击，则将 5 个车放入奇数行有 5！种放法，将 4 个车放入偶数行有 4！种放法，将 9 个车放入棋盘有 5！4！种放法，而现在要放 8 个车，则所有放法种数为



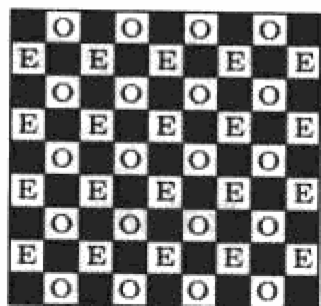
2004.2.1 图

$$C_9^8 \cdot 5!\ 4! = 9 \cdot 5! \cdot 4!.$$

同理，将白格做同样的划分，可知，在奇数行中，可以放入 4 个互不攻击的车，放法为 $A_5^4 = 5!$ 种，在偶数行中也只能放下 4 个互不攻击的车，放法为 $A_5^4 = 5!$ 种，故在白格中的放法数为 $5! \cdot 5!$ 种.

综上，总的放法种数为

$$9 \cdot 5! \cdot 4! + 5! \cdot 5!$$
$$= 14 \cdot 5! \cdot 4! = 40320 \text{ 种}.$$



2004.2.2 图

【解 2】首先考虑车在黑格中的情形，注意到 8 个车放到 9 行中，恰有一行没有车，分两种情况：

(a)不含车的行为奇数行，此时先在 5 个奇数行中选一行不放车，然后将 8 个车依次放入奇数行和偶数行，放法总数为：

$$5 \cdot A_5^4 \cdot A_4^4 = (5!)^2;$$

(b)不含车的行为偶数行，此时先在 4 个偶数行中选一行不放车，然后将 8 个车依次放入奇数行和偶数行，放法总数为：

$$4 \cdot A_4^3 \cdot A_5^5 = 4(5! \cdot 4!).$$

类似的处理车在白格中的情形，注意到 5 个奇数行中每行白格仅有 4 个，则所去掉的行只能是白行，此时放法数为：

$$5 \cdot A_5^4 \cdot A_4^4 = (5!)^2.$$

综上，放法总数为 $(5!)^2 + 4(5! \cdot 4!) + (5!)^2 = 40320$ 种.

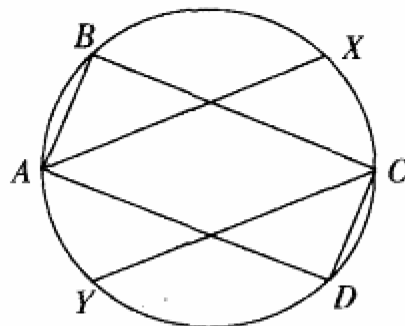
3 已知，A、B、C、D 是圆上顺次四点，且 $AB<AD$，$BC>CD$，$\angle BAD$ 的平分线交圆于 X，$\angle BCD$ 的平分线交圆于 Y，在由这六个点构成的六边形中，如果有四条边的长度相等，那么 BD 必为圆的直径.

【证明 1】因为 CY 平分 $\angle BCD$，所以 $\overset{\frown}{BY} = \overset{\frown}{YC}$，又 $AB<AD$，故 Y 在 A、D 两点之间且

$DY>YA,DY>AB$. 同理，X 在 B、C 两点之间且 $BX>XC$，$BX>CD$，这样，六边形的相等四边就只能是

$$YA=AB=XC=CD.$$

记$\angle BAX=\angle DAX=\alpha,\angle BCY=\angle DCY=\gamma$，由题意，$2\alpha+2\gamma=180°$，故 $\alpha+\gamma=90°$，又 $YA=AB=XC=CD$，则 $\overset{\frown}{BY}=\overset{\frown}{XD}$，$\alpha=\gamma$，所以 $\alpha=\gamma=45°$，故$\angle BAD=2\alpha=90°$，则 BD 为圆的直径.



2004.3 图

【证明 2】因为 CY 平分$\angle BCD$，所以$\overset{\frown}{BY}=\overset{\frown}{YC}$，又 $AB<AD$，故 Y 在 A、D 两点之间且 $DY>YA,DY>AB$. 同理，X 在 B、C 两点之间且 $BX>XC,BX>CD$，这样，六边形的相等四边就只能是

$$YA=AB=XC=CD.$$

从而$\overset{\frown}{YA}=\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{XC}=\overset{\frown}{CD}$，则$\overset{\frown}{BY}=\overset{\frown}{XD}\Rightarrow BY=XD$.

又 $BX=XD,DY=BY$，则 $BY=YD=DX=XB$，再注意到 $BYDX$ 内接于圆，可知 $BYDX$ 为正方形，故 BD 为圆的直径.

4 已知 p 是奇素数，证明：

$$\sum_{k=1}^{p-1}k^{2p-1}\equiv\frac{p(p+1)}{2}\pmod{p^2}.$$

【**证明**】由 $p-1$ 为偶数，可得

$$\sum_{k=1}^{p-1}k^{2p-1}=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(k^{2p-1}+(p-k)^{2p-1}\right).$$

而
$$k^{2p-1}+(p-k)^{2p-1}=k^{2p-1}+p^{2p-1}+C_{2p-1}^{1}p^{2p-2}(-k)+\cdots+C_{2p-1}^{2p-2}p(-k)^{2p-2}+(-k)^{2p-1}$$
$$=p^{2p-1}+C_{2p-1}^{1}p^{2p-2}(-k)+\cdots+C_{2p-1}^{2p-3}p^2(-k)^{2p-3}+C_{2p-1}^{2p-2}p(-k)^{2p-2},$$

则
$$k^{2p-1}+(p-k)^{2p-1}\equiv C_{2p-1}^{2p-2}p(-k)^{2p-2}\equiv(2p-1)p\cdot k^{2p-2}\pmod{p^2}$$

由费马小定理知

$$k^{p-1}\equiv1\pmod p\ (1\leqslant k<p),$$

则
$$(2p-1)k^{2p-2}\equiv(2p-1)\cdot1^2\equiv-1\pmod p,$$

故存在整数 m，使得$(2p-1)k^{2p-2}=mp-1$，则

$$(2p-1)pk^{2p-2}=mp^2-p\equiv-p\pmod{p^2}.$$

所以，
$$\sum_{k=1}^{p-1}k^{2p-1}\equiv\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(-p)\equiv\frac{p-1}{2}\cdot(-p)$$
$$\equiv\frac{p-p^2}{2}+p^2\equiv\frac{p(p+1)}{2}\pmod{p^2}.$$

5 设 T 是由 2004^{100} 的所有正约数组成的集合,集合 S 满足:

(1)S 是 T 的子集;

(2)S 中任何一个元素都不是 S 中另一个元素的倍数.

求 S 中元素个数的最大值.

【证明】因为 $2004=2^2\cdot 3\cdot 167$,则

$$T=\{2^a 3^b 167^c \mid 0\leqslant a\leqslant 200, 0\leqslant b, c\leqslant 100, a, b, c\in \mathbf{N}\}.$$

设 $S=\{2^{200-b-c}3^b 167^c \mid 0\leqslant b, c\leqslant 100, b, c\in \mathbf{N}\}$,对于任何 $0\leqslant b, c\leqslant 100$,都有 $200-b-c\leqslant 200$,则 S 为 T 的一个子集,S 中共有 $101\times 101=101^2$ 个不同的元素.

以下证明上述 S 满足条件(2),而且没有其他适合条件的集合比 S 有更多的元素.

假设集合 S 中 $2^{200-b-c}3^b 167^c$ 是 $2^{200-j-k}3^j 167^k$ 的倍数,则

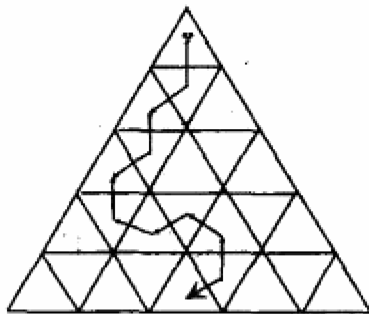
$$200-b-c\geqslant 200-j-k, b\geqslant j, c\geqslant k,$$

由前一个不等式得 $b+c\leqslant j+k$,由后两个不等式得 $b+c\geqslant j+k$,则 $b=j$ 且 $c=k$,因此 S 中没有一个元素是另一个元素的倍数.

假设 U 是 T 的一个子集且 U 中的元素超过 101^2 个,因为数组 (b,c) 只有 101^2 种取值,那么 U 中一定含有两个元素 $u_1=2^{a_1}3^{b_1}167^{c_1}$ 和 $u_2=2^{a_2}3^{b_2}167^{c_2}$,且 $b_1=b_2$, $c_1=c_2$ 但 $a_1\neq a_2$,若 $a_1>a_2$ 则 u_1 是 u_2 的倍数,若 $a_1<a_2$ 则 u_2 是 u_1 的倍数,这意味着 U 不满足题设条件. 因此,T 中元素最多有 $101^2=10201$ 个.

第37届加拿大数学奥林匹克(2005)

1 将边长为 n 的正三角形每条边 n 等分，得到若干个单位正三角形. 令 $f(n)$ 表示第一层的小三角形到最底层正中的小三角形的不同路径数. 每次移动，只能从一个单位三角形走到另一个与它有公共边，且与其在同一行或在其所在行下面一行的单位三角形中. 同时，不能经过同一个小三角形2次或2次以上. 图中给出了 $n=5$ 时的一条路径. 试确定 $f(2005)$ 的值.



2005.1 题图

【**解**】我们来证明 $f(n)=(n-1)!$.

将水平的直线自上而下地记为 $l_1,l_2,\cdots,l_n$.

因为路径是从顶层到底层且不会自"下"而"上"，所以该路径必然恰通过 $l_1,l_2,\cdots,l_{n-1}$ 各一次，对于所有 k，l_k 均被斜向的直线分成了 k 段线段，并且路径必从这 k 段中的一段通过. 一条路径可由所通过的 $n-1$ 条线段(指 $n-1$ 条水平直线被穿过的 $n-1$ 段)构成的集合完全确定下来，当路径由第 k 行向第 $k+1$ 行延伸时，共有 k 段可能的线段使路径通过 l_k，从而有

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)=(n-1)!$$

种方法使得路径通过这 $n-1$ 条水平线并且每种方法对应一条路径，所以 $f(n)=(n-1)!$. 特别地，$f(2005)=2004!$.

2 正整数组 (a,b,c) 满足 $a^2+b^2=c^2$. 证明：

(ⅰ) $\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2>8$;

(ⅱ) 不存在整数 n，使得存在 (a,b,c) 满足 $\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2=n$.

(ⅰ)【**证明1**】根据条件和均值不等式，得

$$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2=c^2\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2=\frac{(a^2+b^2)(a+b)^2}{a^2b^2}$$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{a^2b^2}(2\sqrt{ab})^2}{a^2b^2}=8.$$

等号成立当且仅当 $a=b$，这要求 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}c$，矛盾！故 $\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2>8$.

【**证明2**】因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $a\neq b$(否则，$c=\sqrt{2}a$，矛盾). 故

$$a+b<\sqrt{2(a^2+b^2)}=\sqrt{2}c,$$

即

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)<\sqrt{2}.$$

由柯西不等式,有

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)\geqslant 4,$$

则$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)>2\sqrt{2}$,故$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2>8$.

(ⅱ)【证明】因为$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$是有理数,所以,当且仅当$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$是整数时$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2$是整数.

假设$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=m$,不妨设$(a,b)=1$(否则,同除以$a,b,c$的公约数,而$m$值不变),因为$c(a+b)=mab$且$(a,a+b)=1$,所以$a\mid c$,设$c=ak(k\in \mathbf{N}^*)$,于是$a^2+b^2=a^2k^2$,则$b^2=(k^2-1)a^2$,从而$a\mid b$,这与$(a,b)=1$矛盾,故$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2$不等于任何整数$n$.

3 设S是一个由圆内的$n(n\geqslant 3)$点组成的集合.求证:

(ⅰ)总可以找到S中的三个不同的点a、b、c,使得存在对应的圆周上的三个点A、B、C,满足a、b、c分别是S中离A、B、C最近的点;

(ⅱ)无论n为何值,都无法保证找到S中的四个点满足(ⅰ)中的条件.

(ⅰ)【证明】若S中所有点共线,则取a,b为S所在线段的两端点,取射线ba与圆的交为A,取射线ab与圆的交点为B,任取S中不同于a,b的一点c,过c作直线ab的垂线交圆于两点,取其中任意一个作为C,易知此时(a,A),(b,B),(c,C)满足题设要求.

若S中的点不全共线,此时S的凸包必为一凸多边形,过此多边形的任意顶点$a(a\in S$易见$)$可作直线k使得S中的点都在k的一侧(除了a在k上),过a向另一侧作k的垂线,交圆周于A,则(a,A)满足题中要求的性质.而从上述凸多边形上至少有3个顶点,从其中取不同于a的两点b,c,类似可得B,C两点即可.

(ⅱ)【证明】对于一般的$n\geqslant 4$,不妨设圆的半径为1,我们将圆周6等分,取A,B,C为构成等边三角形的三个分点,A',B',C'为相对的另三个分点.以及在半径OA'上截取a使$B'a=\frac{\sqrt{3}}{2}$,同样作点b,c,令$a,b,c\in S$,在O为圆心,半径为$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$的圆内任取S的其他$n-3$个点,容易证明:(a,A),(b,B),(c,C)满足要求的性质,且对任意$d\in S\backslash\{a,b,c\}$都无法找到相应的$D$满足要求的性质.

4 记$\triangle ABC$的周长、面积和外接圆半径分别为P、K、R,试求$\frac{KP}{R^3}$的最大值.

【解1】设三角形三边长为a,b,c,对应的内角为A,B,C,则

$$\frac{PK}{R^3}=\frac{(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}ab\sin C}{\left(\frac{c}{2\sin C}\right)^3}$$

$$=\frac{4(a+b+c)ab\sin^4 C}{c^3}$$

$$=\frac{4(a+b+c)ab(1-\cos^2 C)^2}{c^3}$$

$$=\frac{4(a+b+c)ab\left(\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2-1\right)^2}{c^3}$$

$$=\frac{(a+b+c)^3(a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2}{4a^3b^3c^3},$$

不妨设 $a+b+c=1$，于是问题变为：

求 $\lambda=\frac{(1-2c)^2(1-2b)^2(1-2a)^2}{4a^3b^3c^3}$ 在条件 $a+b+c=1, 0<a,b,c<\frac{1}{2}$ 下的最大值.

记 $t_a=1-2a, t_b=1-2b, t_c=1-2c$，则问题转化为：

求 $\frac{1}{\lambda}=\frac{(1-t_c)^3(1-t_b)^3(1-t_a)^3}{128t_a^2t_b^2t_c^2}$ 在条件 $t_a+t_b+t_c=1, t_a, t_b, t_c>0$ 下的最小值.

而
$$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{128}\left(\frac{1-(t_a+t_b+t_c)+(t_at_b+t_bt_c+t_ct_a)-t_at_bt_c}{\sqrt[3]{(t_at_bt_c)^2}}\right)^3$$

$$=\frac{1}{128}\left(\frac{(t_at_b+t_bt_c+t_ct_a)}{\sqrt[3]{(t_at_bt_c)^2}}-\sqrt[3]{t_at_bt_c}\right)^3$$

$$\geqslant\frac{1}{128}(3-\frac{1}{3})^3=\frac{4}{27}.$$

综上，当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，所求比值达到最大，为 $\frac{27}{4}$.

【解 2】因为
$$K=2R^2\sin A\sin B\sin C,$$
$$P=a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C),$$

故
$$\frac{KP}{R^3}=4\sin A\sin B\sin C(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$\leqslant 12\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^4.$$

因为，$y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 内为凸函数，所以

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leqslant\sin\frac{A+B+C}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故
$$\frac{KP}{R^3}\leqslant 12\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=\frac{27}{4}.$$

5 若三元正整数组 (a,b,c) 满足

$$a\leqslant b\leqslant c, (a,b,c)=1 \text{ 且 } (a+b+c)\mid(a^n+b^n+c^n),$$

则称(a,b,c)为“n-幂次”的. 例如:(1,2,2)是“5-幂次”的.

(ⅰ)求所有的三元组,使得对所有$n\geqslant1$,该数组是“n-幂次”的.

(ⅱ)求所有的三元组,使之是“2004-幂次”的和“2005-幂次”的但不是“2007-幂次”的.

(ⅰ)【解】设(a,b,c)满足条件,则由

$$(a+b+c)\mid(a^2+b^2+c^2)$$

得
$$(a+b+c)\mid(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2),$$

于是
$$(a+b+c)\mid 2(ab+bc+ca). \tag{1}$$

由$(a+b+c)\mid(a^3+b^3+c^3)$,得

$$(a+b+c)\mid(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

于是
$$(a+b+c)\mid 3abc. \tag{2}$$

对于任意素因子$p\geqslant5$,若$p\mid(a+b+c)$,则$p\mid abc$.

不妨设$p\mid a$,则$b+c\equiv0\pmod p$. 又由(1)式可得$bc\equiv0\pmod p$,于是$b\equiv c\equiv0\pmod p$,这与$(a,b,c)=1$矛盾! 故$a+b+c$无大于3的素因子.

对于因子2,若$2\mid(a+b+c)$,则由$(a,b,c)=1$可知a,b,c的奇偶性为两奇一偶,此时$2(ab+bc+ca)\equiv2\pmod4$,所以由(1)式知,$(a+b+c)$至多含2的一次因子;

对于因子3,若$3\mid(a+b+c)$,与上面相同的推理可得$3\nmid abc$,故由(2)式知,$(a+b+c)$至多含3的一次因子.

综上所述,我们有$(a+b+c)\mid6$,由a,b,c为正整数,容易求得符合条件的数组为(1,1,1),(1,1,4).

(ⅱ)【解】记$T_n=a^n+b^n+c^n$,注意到多项式

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a)(x-b)(x-c)\\&=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc,\end{aligned}$$

则
$$f(a)=a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0,$$

从而
$$a^3=(a+b+c)a^2-(ab+bc+ca)a+abc,$$

两边同乘以a^{n-3},得

$$a^n=(a+b+c)a^{n-1}-(ab+bc+ca)a^{n-2}+(abc)a^{n-3}.$$

对b,c有类似的结论,将三者相加,得

$$T_n=(a+b+c)T_{n-1}-(ab+bc+ca)T_{n-2}+abcT_{n-3}.$$

故若有$(a+b+c)\mid T_{n-3}$,且$(a+b+c)\mid T_{n-2}$,则必有$(a+b+c)\mid T_n$,由此,取$n=2007$,知不存在符合条件的正整数组.

第 38 届加拿大数学奥林匹克(2006)

1　设 $f(n,k)$为把 k 块糖分给 n 个小孩，且使每个小孩至多分得 2 块糖的分法数目. 例如，当 $n=3$ 时，$f(3,7)=0$，$f(3,6)=1$，$f(3,4)=6$. 求 $f(2006,1)+f(2006,4)+f(2006,7)+\cdots+f(2006,1000)+f(2006,1003)$的值.

【解 1】把 k 块糖分给 2006 个小孩的分法数，等于给某个选定的小孩分 0 块糖、其余 k 块糖给其他孩子的分法，加上给这个小孩 1 块糖，其余 $k-1$ 块糖分给其他人的分法，再加上给这个孩子 2 块糖，其余 $k-2$ 块糖给其他人的分法的和. 因此

$f(2006,k)=f(2005,k)+f(2005,k-1)+f(2005,k-2)$，

故所求分法总数为 $1+\sum\limits_{k=1}^{1003} f(2005,k)$.

为计算 $f(n,k)$，设有 r 个小孩分得 2 块糖，这 r 个小孩有 C_n^r 种选法. 剩余 $k-2r$ 块糖给剩余 $n-r$ 个小孩每人至多一块. 因此

$$f(n,k)=\sum_{r=0}^{[k/2]} C_n^r C_{n-r}^{k-2r}=\sum_{r=0}^{\infty} C_n^r C_{n-r}^{k-2r}.$$

上式中，当 $x<y<0$ 时，$C_x^y=0$.

故本题答案为 $\sum\limits_{k=1}^{1003}\sum\limits_{r=0}^{\infty} C_{2005}^r C_{2005-r}^{k-2r}=\sum\limits_{r=0}^{\infty} C_{2005}^r \sum\limits_{k=1}^{1003} C_{2005-r}^{k-2r}$.

【解 2】所求分法数等于$(1+x+x^2)^{2005}$的展开式中次数不超过 1003 的项的系数之和，也等于下面展开式中 x^{1003}项的系数：

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2)^{2005}(1+x+\cdots+x^{1003})\\=&\left[(1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2005}\right](1-x^{1004})(1-x)^{-1}\\=&(1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2006}-(1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2006}x^{1004}.\end{aligned}$$

因为上式右边第二项的展开式中每一项次数都超过 1003，我们在第一项的展开式中求 x^{1003}的系数：

$$\begin{aligned}&(1-x^3)^{2005}(1-x)^{-2006}\\=&\sum_{i=0}^{2005}(-1)^i C_{2005}^i x^{3i}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j C_{2006}^j x^{-j}\\=&\sum_{i=0}^{2005}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i C_{2005}^i C_{2005+j}^j x^{3i+j}\\=&\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2005}(-1)^i C_{2005}^i C_{2005+k-3i}^{2005}\right)x^k.\end{aligned}$$

故所求数目是

$$\sum_{i=1}^{334}(-1)^i C_{2005}^i C_{3008-3i}^{2005}$$
$$=\sum_{i=1}^{334}(-1)^i \frac{(3008-3i)!}{i!\ (2005-i)!\ (1003-3i)!}.$$

当 $i\geqslant 335$ 时，$C_{3008-3i}^{2005}=0$.

2　设$\triangle ABC$为锐角三角形，矩形 $DEFG$ 内接于$\triangle ABC$，使得 D 在 AB 上，E 在 AC 上，F 和 G 在 BC 上. 试求所有可能的矩形 $DEFG$ 的对角线交点的轨迹.

〖**解**〗设 M 为$\triangle ABC$的边 BC 的中点，K 为高 AH 的中点，则所求轨迹为线段 MK.

注意到 D 在 AB 上，E 在 AC 上，线段 DE 确定一个内接矩形，线段 DE 的中点 I 在中线 AM 上，从 I 向 BC 边所作垂线段的中点 O 恰为矩形的中心，易知 O 在 $\mathrm{Rt}\triangle AMH$ 的中线 MK 上.

反之，线段 MK 上任意一点 P，必为一边在 BC 上、宽为 K 到 BC 距离的 2 倍的一个矩形的中心.

3　在一个 m 行 n 列非负实数阵中，每行、每列中都至少有一个正数. 若某一行与某一列相交于一个正数，则该行的各数之和与该列的各数之和相等. 求证：$m=n$.

〖**证明**〗记矩阵中第 i 行第 j 列元素为 a_{ij}，设 $S=\{(i,j):a_{ij}>0\}$. 记第 i 行元素之和为 r_i，第 j 列元素之和为 c_j，则当$(i,j)\in S$ 时，有 $r_i=c_j$. 那么

$$\sum\left\{\frac{a_{ij}}{r_i}:(i,j)\in S\right\}=\sum\left\{\frac{a_{ij}}{c_j}:(i,j)\in S\right\}.$$

我们分别从两边计算其和：

$$\sum_{(i,j)\in S}\frac{a_{ij}}{r_i}=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}\frac{a_{ij}}{r_i}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{r_i}\right)r_i=\sum_{i=1}^{m}1=m,$$
$$\sum_{(i,j)\in S}\frac{a_{ij}}{c_j}=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}\frac{a_{ij}}{c_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{c_j}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{c_j}\right)c_j=\sum_{j=1}^{n}1=n.$$

故 $m=n$.

4　一次循环赛中有 $2n+1$ 支参赛队，其中每队与其他队都只打一场比赛，且比赛结果中没有平局. 若三个队 X、Y、Z 满足：X 击败 Y，Y 击败 Z，Z 击败 X，则称它们形成一个环形三元组.

(1)求环形三元组的最小可能数目；

(2)求环形三元组的最大可能数目.

〖**解 1**〗(1)最小值为 0，如果在比赛中两支队 T_i 与 T_j：当且仅当 $i>j$ 时，有 T_i 击败

T_j，此时环形三元组数最小.

(2)任何三个队要么组成一个环形三元组，要么组成一个"支配型"三元组(某队击败了其余两队). 设前者有 c 组，后者有 d 组，则 $c+d=C_{2n+1}^3$. 假设某队 T_i 击败 x_i 个其他队，则获胜组必在 $C_{x_i}^2$ 个支配型三元组中. 注意到所有的比赛场次为 $\sum_{i=1}^{2n+1} x_i=C_{2n+1}^2$，因此

$$d=\sum_{i=1}^{2n+1} C_{x_i}^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2-\frac{1}{2}C_{2n+1}^2,$$

由 Cauchy－Schwarz 不等式，

$$(2n+1)\sum_{i=1}^{2n+1} x_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{2n+1} x_i\right)^2=n^2(2n+1)^2.$$

因此，

$$\begin{aligned}c&=C_{2n+1}^3-\sum_{i=1}^{2n+1} C_{x_i}^2\\&\leqslant C_{2n+1}^3-\frac{n^2(2n+1)}{2}+\frac{1}{2}C_{2n+1}^2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

以下说明上式等号能够取到.

设参赛队 $T_i=T_{i-2n-1}(i>2n+1)$，对每一个 i，设 T_i 队击败 $T_{i+1}, T_{i+2}, \cdots, T_{i+n}$，且输给 $T_{i+n+1}, T_{i+n+2}, \cdots, T_{i+2n}$. 我们需要检验这是一个能取到等号的胜、负结果.

考虑含有 T_i 的环形三元组，若环形三元组中含有 $T_{i+j}(1\leqslant j\leqslant n)$，则第三个队可为 T_{i+n+1} 到 T_{i+n+j}，共 j 种取法.

即对每一个 i，共有 $\sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2}$ 个环形三元组. 当我们安排完所有 i 之后，每一个环形三元组被计算了三次，因此环形三元组的数目为

$$\frac{2n+1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

综上，环形三元组最多可能有 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 个.

【**解 2**】设 t 为环形三元组的个数，u 为满足 X 击败 Y，Y 击败 Z 的有序三元组 (X,Y,Z) 的个数. 每一个环形三元组产生 3 个有序三元组，而其他三元组只产生 1 个符合条件的有序三元组.

而三元组的总数为 $C_{2n+1}^3=\frac{n(4n^2-1)}{3}$，故非环形三元组的个数为 $\frac{n(4n^2-1)}{3}-t$，因此，

$$u=\frac{n(4n^2-1)}{3}-t+3t=\frac{n(4n^2-1)}{3}+2t.$$

从而,

$$t=\frac{3u-n(4n^2-1)}{6}$$
$$=\frac{u-(2n+1)n^2}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

如果某队 Y 击败了 a 个队,输给 b 个队,那么以 Y 为中间元素的有序三元组的数目为 ab. 因为 $a+b=2n$,由均值不等式,有 $ab\leqslant n^2$.

因此,$u\leqslant(2n+1)n^2$,从而 $t\leqslant\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

等号当 $u=(2n+1)n^2$ 时达到,即当所有参赛队排列在一个圆周上,对每个参赛队而言,在它顺时针方向的 n 个队被他击败,在它逆时针方向上的 n 个队都击败它时取到最大值.

5 圆的内接直角$\triangle ABC$的三个顶点分圆为三段弧,直角顶点 A 所对的$\overset{\frown}{BC}$为一个半圆,$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{AC}$为劣弧. 对三段弧的每一段作切线,使切点恰为切线被直线 AB、AC 所截得的线段的中点. 例如过$\overset{\frown}{BC}$上一点 D 作切线,分别交直线 AB、AC 于点 D',D'',使得 D 恰为线段 $D'D''$的中点. 类似地得到点 E 和 F.

求证:$\triangle DEF$ 是等边三角形.

〖**证明 1**〗记加一撇的字母为切线与 AB 的交点,加双撇的字母为切线与 AC 的交点. 由已知有

$$DD'=DD'',EE'=EE'',FF'=FF''.$$

只需证

$$\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{DF}=\frac{1}{3}\cdot 2\pi.$$

$\because AF$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle AF''F'$的斜边上的中线,$\therefore FF'=FA$.

$\therefore \overset{\frown}{AF}=2\angle F''F'A=2(\angle FF'A+\angle FAF')$
$\quad=4\angle FAF'=4\angle FAB=2\overset{\frown}{BF}$.

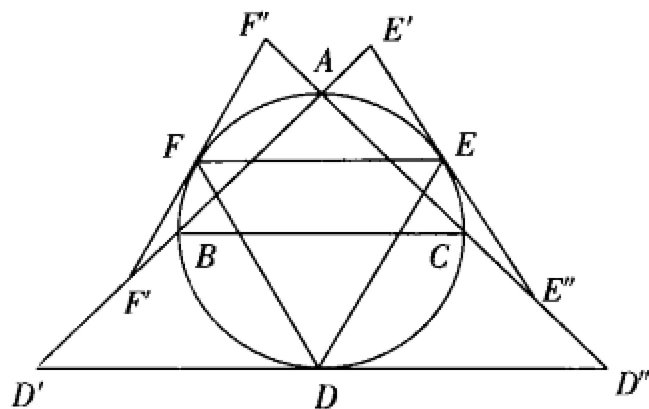
$\therefore \overset{\frown}{AF}=\frac{2}{3}\overset{\frown}{BA}$. 同理,$\overset{\frown}{AE}=\frac{2}{3}\overset{\frown}{AC}$.

$\therefore \overset{\frown}{FE}=\frac{2}{3}(\overset{\frown}{BA}+\overset{\frown}{AC})=\frac{2\pi}{3}$.

对于$\overset{\frown}{DF}$,有

$$\overset{\frown}{BD}=2\angle BAD=\angle BAD+\angle BD'D$$
$$=\angle ADD''=\angle ABD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACD}.$$

而$\overset{\frown}{BF}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AF}$,$\therefore \overset{\frown}{DF}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{FAD}=\frac{2\pi}{3}$,故命题得证.



2006.5 图

〖证明 2〗∵$\triangle AE'E''$是 Rt△，

∴$AE=EE'=EE''$. ∴$\angle CAE = \angle CE''E$.

又∵$AD=DD'=DD''$，∴$\angle CDD''=\angle CAD=\angle CD''D$.

∵$EADC$ 为圆内接四边形，

∴$180°=\angle EAD+\angle ECD=\angle DAC+\angle CAE+\angle ECA+\angle ACD$

$=\angle DAC+\angle CAE+\angle CEE''+\angle CE''E+\angle CDD''+\angle CD''D$

$=\angle DAC+\angle CAE+\angle CAE+\angle CAE+\angle CAD+\angle CAD$

$=3(\angle DAC+\angle CAE)=3\angle DAE$.

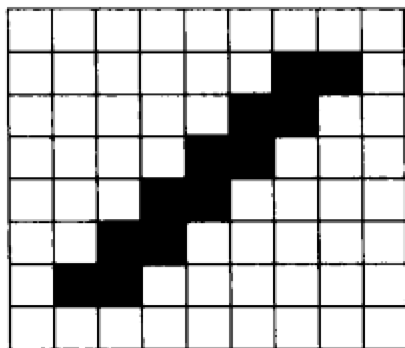
∴$\angle DFE=\angle DAE=60°$，同理，$\angle DEF=60°$.

∴$\triangle DEF$ 是等边三角形.

第 39 届加拿大数学奥林匹克(2007)

1 在 8×9 的方格表上已经放置了 6 块 2×1 的多米诺骨牌，位置如图所示，则该棋盘上至多可以放置多少块多米诺骨牌(每块骨牌都在方格表内，且互不重叠，包含已放置的 6 块多米诺)?

【证明】首先将棋盘划分成五个部分，C 为放置的 6 个多米诺覆盖的部分，B、D 分别为右上角、左下角处的小方格，A 是 $B\cup C\cup D$ 左上方的方格的集合，E 是 $B\cup C\cup D$ 右下方的方格的集合.



2007.1 图

用黑白两色交替将方格表染色：使得 B 为白格，则 D 为黑格，A 中有 16 个白格、13 个黑格，E 有 16 个黑格、13 个白格. 则在 $A\cup B\cup D$ 中至多可以放入 14 个多米诺，在 $B\cup D\cup E$ 中至多可以放入 14 个多米诺，则至多可以放入 $14\times 2+6=34$ 块多米诺. 这是可以达到的，我们只需在 $A\cup D$ 和 $E\cup B$ 中各放 14 块多米诺骨牌即可.

2 给定两个三角形满足如下条件：

(1)一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应相等；

(2)这两个三角形相似，但不一定全等.

求证：这两个三角形的相似比介于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$和$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$之间.

【证明】若三角形是等腰三角形，则这两个三角形一定全等，相似比为 1. 这是因为这两个三角形至少有一组对应边相等.

若三角形不是等腰三角形，不妨设这两个三角形的边长分别为 x、y、z($x<y<z$)和 y、z、u($y<z<u$). 于是，

$$\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{u}{z}=k>1.$$

从而，$y=kx$，$z=ky=k^2x$.

因为 $z<x+y$，所以 $k^2<1+k$. 故 $1<k<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

同理，当 $x>y>z$，$y>z>u$ 时，相似比为$\frac{1}{k}$，即有$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{1}{k}<1$.

综上，这两个三角形的相似比介于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$和$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$之间.

3　已知在 $\mathbf{R}$ 上取值的函数 f 对任意实数 x、y，均有

$$f(xy)+f(y-x)\geqslant f(y+x).$$

(1)试给出一个满足条件的非常数多项式 $f(x)$；

(2)求证：对于任意实数 x，均有 $f(x)\geqslant 0$.

(1)【**解**】令 $f(x)=x^2+4$. 则

$$\begin{aligned}&f(xy)+f(y-x)-f(y+x)\\=&(x^2y^2+4)+(y-x)^2+4-(y+x)^2-4\\=&(xy)^2-4xy+4=(xy-2)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

故 $f(x)=x^2+4$ 满足条件.

(2)【**证明 1**】考虑满足 $xy=x+y$ 的数对 (x,y)，则

$$(x-1)(y-1)=1.$$

取 $y-1=t$，则 $x-1=\frac{1}{t}$，于是，对于 $t\neq 0$，

$$(x,y)=(1+\frac{1}{t},1+t).$$

将其代入原函数不等式，并化简得

$$f(t-\frac{1}{t})\geqslant 0.$$

对于任意的实数 u，方程 $t-\frac{1}{t}=u$ 即二次方程 $t^2-ut-1=0$ 的判别式大于 0，即有实根 t.

因此，对于任意的实数 u，均有 $f(u)\geqslant 0$.

【**证明 2**】令 $v=y-x$，$u=y+x$，则 $x=\frac{u-v}{2}$，$y=\frac{u+v}{2}$，代入条件式，有

$$f\left(\frac{u^2-v^2}{4}\right)+f(v)\geqslant f(u).$$

取 $u=2+\sqrt{v^2+4}$，则 $\frac{u^2-v^2}{4}=2+\sqrt{v^2+4}=u$，从而 $f(v)\geqslant 0$.

因此，对于任意的实数 v，均有 $f(v)\geqslant 0$.

4　对于满足 $ab\neq 1$ 的实数 a、b 定义运算“$*$”：

$$a*b=\frac{a+b-2ab}{1-ab}.$$

现有一个项数为 $n(n\geqslant 2)$ 的实数列 S，其所有项 x 均满足 $0<x<1$，从 S 中任取两项 a、b，将它们删除，并将 $a*b$ 的值添在 S 的最后，这样得到的新数列的项数就减少了 1. 重复该操作直到仅剩下一项.

(1)求证：最后剩下的一项的值与每一步操作中所取的两项无关；

(2)若 S 中的项的取值范围变为 $0<x\leqslant 1$,且 S 中恰有一项为 1,又将会出现的什么样的结论?

(1)【证明】首先证明:运算 $*$ 保持对于任意的 a、$b(0<a、b<1)$,都有 $0<a*b<1$.实际上,由

$$a+b-2ab=a(1-b)+b(1-a)>0$$

及
$$1-\frac{a+b-2ab}{1-ab}=\frac{(1-a)(1-b)}{1-ab}>0,$$

可知
$$0<\frac{a+b-2ab}{1-ab}<1.$$

因此,运算可以一直进行下去.

由 $a*b=\dfrac{a+b-2ab}{1-ab}$,得

$$a*b=b*a,$$

且
$$a*(b*c)=(a*b)*c=\frac{a+b+c-2(ab+bc+ca)+3abc}{1-(ab+bc+ca)+2abc}.$$

由于最后剩下的一项是 S 中的 n 个数关于 $*$ 的运算,且满足结合律和交换律,因此,最后的值与每次操作选取哪两项无关.

(2)【解】对于每一个 $a\neq 1$,$a*1=1$.因此,1 总会在这个变化着的数列中,直到最后只有一项.所以,最后剩下的一项为 1.

5 $\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边 BC、CA、AB 于点 D、E、F,$\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 与 $\triangle AEF$ 的外接圆 $\odot O_1$、$\triangle BFD$ 的外接圆 $\odot O_2$、$\triangle CDE$ 的外接圆 $\odot O_3$ 分别交于点 A 和 P、B 和 Q、C 和 R.求证:

(1)$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 交于一点;

(2)PD、QE、RF 三线交于一点.

(1)【证明】记$\triangle ABC$ 的内心为 I,注意到 $EI\perp AC$,$FI\perp AB$,从而 A、E、F、I 共圆,即$\odot O_1$ 过 I,同理$\odot O_2$、$\odot O_3$ 也过 I,从而,$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 共点于 I.

(2)【证明】如图,连结 RE、RD、RA、RB.则

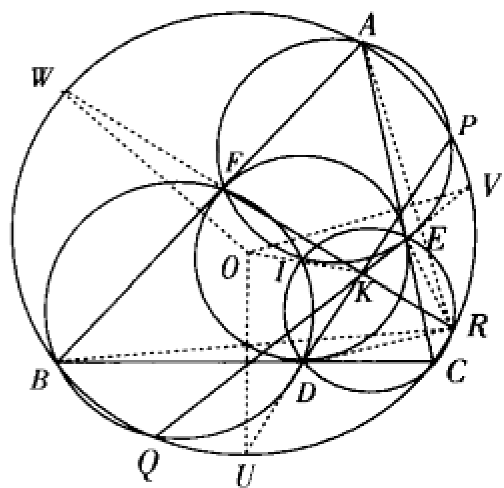
$$\angle ERD=\angle ECD=\angle ACB=\angle ARB.$$

于是,$\angle ARE=\angle BRD$.

又因为$\angle REC=\angle RDC$,所以,$\angle AER=\angle BDR$.

因此,$\triangle ARE\backsim\triangle BRD$.从而,

$$\frac{AR}{BR}=\frac{AE}{BD}=\frac{AF}{BF}.$$



2007.5 图

所以，RF 平分$\angle ARB$. 因此，RF 过$\odot O$ 的$\overset{\frown}{AB}$的中点 W.

同理，PD、QE 分别是$\angle BPC$、$\angle CQA$ 的角平分线，且分别过$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$的中点 U、V.

又 PU、QV、RW 分别过点 D、E、F，则只须证明：DU、EV、FW 三线交于一点.

因为 ID、OU 都垂直于 BC，所以，$ID /\!/ OU$.

同理，$IE /\!/ OV$，$IF /\!/ OW$.

又 $ID=IE=IF=r$，$OU=OV=OW=R$.

取 OI 的外比分点 K 满足$\frac{OK}{KI}=\frac{R}{r}$.

则 UD、VE、WF 均过点 K. 从而，DU、EV、FW 三线交于一点.

第 40 届加拿大数学奥林匹克(2008)

1 凸四边形 $ABCD$ 中,AB 是最长边. 点 M、N 分别在边 AB、BC 上,且线段 AN、CM 均平分四边形 $ABCD$ 的面积. 求证:线段 MN 平分对角线 BD.

〖**证明** 1〗由 $S_{MADC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{NADC}$,知

$$S_{\triangle ACM}=S_{\triangle ACN}\Rightarrow MN/\!/AC.$$

过点 D 作 $PQ/\!/AC$,交 BA 的延长线于点 P,交 BC 的延长线于点 Q,则 $PQ/\!/AC/\!/MN$.

所以 $S_{\triangle BCM}=S_{ADCM}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ACM}=S_{\triangle PAC}+S_{\triangle ACM}=S_{\triangle PCM}$.

从而 $PM=BM$,同理 $BN=CQ$,即 MN 是$\triangle BPQ$ 的中位线,设 BD 交 MN 于点 H,则 $BH=HD$. 命题得证.

〖**证明** 2〗取 BD 中点 K,则

$$S_{AKDC}=S_{\triangle AKD}+S_{\triangle CKD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}+\frac{1}{2}S_{\triangle CBD}$$
$$=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{ANDC},$$

从而 $NK/\!/AC$.

同理,$MK/\!/AC$,从而 M、N、K 三点共线.

故 MN 平分对角线 BD.

2 求所有函数 $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$,使得对任意有理数 x,y,均有

$$f(2f(x)+f(y))=2x+y.$$

〖**解**〗对任意 $x\in\mathbf{Q}$,$f(x)=x$ 或 $f(x)=-x$,这均不难验证.

令 $y=x$,则 $f(3f(x))=3x$.

令 $y=x=3f(x)$,则

$$f(9x)=f(3f(3f(x)))=3\cdot[3f(x)]=9f(x).$$

当 $x=0$ 时,$f(0)=9f(0)$,则 $f(0)=0$.

将 $x=0$ 代入所给等式,则对任意 $y\in\mathbf{Q}$,有 $f(f(y))=y$,故 f 为一一映射. 从而对任意有理数对(x,y),有

$$2f(x)+f(y)=f(2x+y).$$

当 $y=0$ 时,有 $f(2f(x))=2x$,因此有 $2f(x)=f(2x)$.

所以对于任意有理数对(x,y),有

$$f(2x)+f(y)=f(2x+y).$$

令 $u=2x,v=y$，则对任意有理数对 (u,v)，均有

$$f(u+v)=f(u)+f(v).$$

由 $0=f(0)=f(-1)+f(1)$，$f(-1)=-f(1)$，利用归纳法，易知，对整数 n 和有理数 x，$f(nx)=nf(x)$.

令 $k=f(1)$，则 $f(n)=nk$，$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{k}{n}$，且对任意整数对 (m,n)，有 $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{mk}{n}$，所以 $f(x)=kx$，又 $f(f(x))=x$，所以 $k^2=1$.

从而 $f(x)=x$ 或 $f(x)=-x$.

3 若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=1$，求证：

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leqslant\frac{3}{2}.$$

【**证明 1**】注意到 $\frac{a-bc}{a+bc}=\frac{2a}{a+bc}-1=\frac{2a}{1-b-c+bc}-1$

$$=\frac{2a}{(1-b)(1-c)}-1=\frac{2a}{(a+c)(a+b)}-1,$$

从而原不等式等价于

$$\frac{a}{(a+c)(a+b)}+\frac{b}{(b+c)(a+b)}+\frac{c}{(a+c)(c+b)}\leqslant\frac{9}{4}.$$

即
$$a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\leqslant\frac{9}{4}(b+c)(a+b)(c+a).$$

即
$$8(ab+bc+ca)\leqslant 9(1-a)(1-b)(1-c).$$

展开，整理，并注意到 $a+b+c=1$，知上式等价于

$$ab+bc+ca\geqslant 9abc.$$

而
$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=(a+b+c)(ab+bc+ca)\\&=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+ca^2+c^2a+3abc\\&\geqslant 6abc+3abc=9abc.\end{aligned}$$

故不等式得证.

【**证明 2**】注意到 $1-\frac{a-bc}{a+bc}=\frac{2bc}{1-b-c+bc}=\frac{2bc}{(1-b)(1-c)}$，

从而原不等式等价于

$$\frac{2bc}{(1-b)(1-c)}+\frac{2ca}{(1-c)(1-a)}+\frac{2ab}{(1-a)(1-b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

化简，有 $4(ab+bc+ca-3abc)\geqslant 3(ab+bc+ca+1-a-b-c-abc)$.

即证
$$ab+bc+ca\geqslant 9abc,\text{或}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9.$$

由算术一调和平均不等式立得证明.

【**证明 3**】注意到 $a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$，则

原不等式等价于

$$\sum(b+c)(a^2+ab+ac-bc)\leqslant\frac{3}{2}(b+c)(a+b)(c+a).$$

$$\Leftrightarrow\sum(a^2b+ca^2+ab^2+ac^2-b^2c-bc^2+2abc)$$

$$\leqslant\frac{3}{2}(a^2b+ca^2+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+2abc)$$

$$\Leftrightarrow\sum(a^2b+ab^2)\geqslant 6abc,$$

这由 AM－GM 不等式知显然成立.

4 求所有函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,使得对任意自然数 n 和素数 p,均有

$$(f(n))^p\equiv n(\bmod f(p)).$$

〖**解**〗取 n 为任一素数 p,则

$$p\equiv 0(\bmod f(p)),$$

故 p 被 $f(p)$ 整除,从而 $f(p)=1$ 或 p.

设 $S=\{p\mid p$ 为素数且 $f(p)=p\}$.

则对每个 $n\in\mathbf{N}^*$ 和 $p\in S$,由 Fermat 小定理,有

$$n\equiv(f(n))^p\equiv f(n)(\bmod p),p\mid(f(n)-n).$$

若 S 为无限集,由于此式对无穷多个 p 成立,故 $f(n)=n$. 显然 $f(n)=n$ 是一个解.

若 S 为空集,即所有 $f(p)=1$,题给条件对任意 $f(n)$ 均成立. 故当 n 非素数时 $f(n)$ 可为任意值.

若 S 为非空有限集,设 a 是 S 的最大元,则对每个素数 $q>a$,$f(q)-q=1-q$ 应当被 a 整除,即 $q\equiv 1(\bmod a)$.

若 $a>2$(a 为奇素数),令 Q 是所有不大于 a 的奇素数之积,则 $Q+2$ 是奇数且与 Q 互素,它的所有素因子均大于 a,从而均$\equiv 1(\bmod a)$. 因此 $Q+2\equiv 1(\bmod a)$. 矛盾.

故只能 $S=\{2\}$. 其他 $f(p)=1$,当 n 非素数时 $f(n)$ 可为与 n 同奇偶的任意值.

因此满足本题条件的 f 有且只有三种:

(1) $f(n)=n(n\in\mathbf{N}^*)$;

(2) $f(n)=\begin{cases}1, & n\text{ 为素数},\\ \text{任意值}, & n\text{ 为非素数};\end{cases}$

(3) $f(n)=\begin{cases}2, & n=2,\\ 1, & n\text{ 为奇素数},\\ \text{与 }n\text{ 同奇偶的任意值}, & n\text{ 为非素数}.\end{cases}$

5 国际象棋棋盘上"车"的自避行走是指"车"这样行走的一条踪迹路径:从一个方格出发穿过两个方格之间的公共边界(不能斜着走)进入另一个方格,但走过的方格不能再走. 即"车"的路径是不自交的. 令 $R(m,n)$ 表示 $m\times n$ 的棋盘(m 行,n 列)上自避行走的"车"从左下角走到左上角的路径的数目.

例如：$R(m,1)=1,R(2,2)=2,R(3,2)=4,R(3,3)=11$.求出 $R(3,n)$的表达式(用 n 表示).

〖解 1〗令 $r_n=R(3,n)$，显然 $r_1=1,r_2=4$，用(i,j)表示方格的坐标，问题变为从$(1,1)$到$(3,1)$的种数.

若 $n\geqslant 3$，有以下 6 种情况：

(1)路线为：$(1,1)\to(2,1)\to(3,1)$；

(2)避开$(2,1)$：任何一种这样的走法开始都要经过$(1,1)\to(1,2)$，最终经过$(3,2)\to(3,1)$，有 r_{n-1}种走法；

(3)开始时：$(1,1)\to(2,1)\to(2,2)$，不再回到第一行，这样的走法在$(2,k)(2\leqslant k\leqslant n)$处进入第三行.然后一直向右走到$(3,1)$，有 $n-1$ 种走法；

(4)路线：开始时$(1,1)\to(2,1)\to\cdots\to(2,k)\to(1,k)\to(1,k+1)$，结束时为$(3,k+1)\to(3,k)\to(3,k-1)\to\cdots\to(3,2)\to(3,1)(2\leqslant k\leqslant n-1)$，有 $r_{n-2}+r_{n-3}+\cdots+r_1$ 种走法；

(5)按(3)中的水平反射图像行走，开始为$(1,1)\to(1,2)\to\cdots$，直到最后一步再进入第三行，有 $n-1$ 种走法；

(6)按(4)中的水平反射图像行走，有 $r_{n-2}+r_{n-3}+\cdots+r_1$ 种走法.

因此 $r_3=1+r_2+2(2+r_1)=11$，对于 $n\geqslant 3$，

$$\begin{aligned}r_n&=1+r_{n-1}+2[(n-1)+r_{n-2}+r_{n-3}+\cdots+r_1]\\&=2n-1+r_{n-1}+2(r_{n-2}+r_{n-3}+\cdots+r_1),\\r_{n+1}&=2n+1+r_n+2(r_{n-1}+r_{n-3}+\cdots+r_1),\end{aligned}$$

因此：

$$r_{n+1}-r_n=2+r_n+r_{n-1}$$

$$\Rightarrow r_{n+1}=2+2r_n+r_{n-1}.$$

所以，$r_{n+1}+1=2(r_n+1)+(r_{n-1}+1)$.

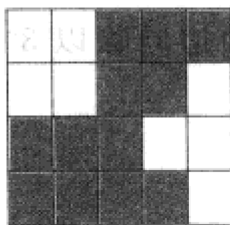
则

$$r_n+1=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1},$$

$$r_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1}-1.$$

第41届加拿大数学奥林匹克(2009)

1　给定 $m\times n$ 方格表,其中每个方格被染成黑色或白色的.若某个黑格的同一行左边有白色方格,且同一列上边有白色方格,则称这个黑格为"坏方格"(如图,为一个不含有"坏方格"的 4×5 方格表).求不含"坏方格"的 $2\times n$ 方格表的数目的表达式.



2009.1 题图

【解1】由题意,第一行肯定不含有"坏方格",下考虑第二行.

设第二行的前 k 个方格均为黑色,第 $k+1$ 个为白色($k\leqslant n-1$),此时第一行对应的前 $k+1$ 个方格,每个均有2种选择,前 $k+1$ 列共有 2^{k+1} 种可能.

而后面的 $n-k-1$ 列中,上下两个方格的组合不能为上白下黑,故每一列有3种选择:上黑下白、上黑下黑或上白下白,从而有 3^{n-k-1} 种选择.

当 $k=n$ 时,也即第二行均为黑色方格时,第一行可任意选取,共 2^n 种可能.

综上,
$$f(n)=\sum_{k=0}^{n-1}2^{k+1}\cdot3^{n-k-1}+2^n$$
$$=3^n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}+2^n=2\cdot3^n-2^n.$$

【解2】记不含"坏方格"的 $2\times n$ 方格表的数目为 $f(n)$,易得
$$f(1)=2^2=4,f(2)=2^4-2=14.$$

下面通过对最右一列不同情形的讨论来确定不含"坏方格"的 $2\times(n+1)$ 方格表的数目:

(1) $2\times(n+1)$ 方格表的最后一列,上下均为白格,此类适合条件的方格表的数目即为 $f(n)$;

(2) $2\times(n+1)$ 方格表的最后一列,上下均为黑格,此类适合条件的方格表的数目也为 $f(n)$;

(3) $2\times(n+1)$ 方格表的最后一列,上为黑格,下为白格,此类适合条件的方格表的数目也为 $f(n)$;

(4) $2\times(n+1)$ 方格表的最后一列,上为白格,下为黑格,此时,要不存在"坏方格",必须下方所有方格均为黑色,共 2^n 种情形.

综上,
$$f(n+1)=3f(n)+2^n.$$

从而,$f(n-1)=3f(n-2)+2^{n-2}\Rightarrow2f(n-1)=6f(n-2)+2^{n-1}$.

用 $f(n)=3f(n-1)+2^{n-1}$ 减去上式,并整理得
$$f(n)=5f(n-1)-6f(n-2).$$

解对应的特征方程 $x^2=5x-6$,得特征根 $x=2$ 或 3,从而

$$f(n)=A\cdot 3^n+B\cdot 2^n.$$

利用初始条件 $f(1)=4, f(2)=14$,解得 $A=2, B=-1$.

从而 $f(n)=2\cdot 3^n-2^n$.

〖解 3〗同解 2 得到 $f(n+1)=3f(n)+2^n$.

两边同除以 3^{n+1},并记 $a_n=\frac{f(n)}{3^n}$,得

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

从而,累加可得 $a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)\right)+a_1$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{2}{3}}+\frac{4}{3}=2-\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

从而 $f(n)=2\cdot 3^n-2^n$.

2 用纸板裁剪出两个半径不同的圆,每个圆再分成 200 个相等的扇形,且将每个圆的 100 个扇形涂成白色,另 100 个扇形涂成黑色.将小圆叠放在大圆的上面,使得它们的圆心重合.

求证:总可以旋转小圆,使得这两个圆的扇形上下对齐,且小圆至少有 100 个扇形位于大圆的同色扇形上.

〖**解** 1〗在每个白色的扇区上标上数字 -1,在每个黑色的扇区上标上数字 1,定义两个对齐扇区的"相对值"为这两个扇区上数字的乘积,则当两个对齐的扇区同色时值为 1,异色时值为 -1,问题即转化为:

存在一个对应方式,使得各对齐扇区的"相对值"的和 $\geqslant 0$.

现任意给出两个圆的一种对齐方式,记此时各对齐扇区的"相对值"的和为 a_1,然后将小圆顺次逆时针旋转 1 格,将每次对应的"相对值"的和分别记为 $a_i(i=2,3,\cdots,200)$,设大圆上各扇形标记数字为 $x_i(i=1,2,\cdots,200)$,小圆上各扇形标记数字为 $y_i(i=1,2,\cdots,200)$,则

$$\sum_{i=1}^{200}a_i=\sum_{i=1}^{200}x_i(y_1+y_2+\cdots+y_{200})$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{200}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{200}y_i\right)=0.$$

从而必存在一个 $a_i\geqslant 0$,命题得证.

〖**解** 2〗假设结论不成立,则在任意位置,同色的扇形数目均少于 100 个.

先将小圆绕圆心旋转,每次转动一格,共转动 199 次,这样小圆共到达 200 个不同的位置,由假设,这个 200 个位置中同色扇形的数目总和 $<100\times200=20000$ 个.

考查小圆上的任意白色扇形,因为旋转了一周,故它同大圆上任一白色扇形均对齐过,也即小圆上任一白色扇形对总的同色扇形数目的贡献为 100,同样的,小圆上的每个黑色扇形对总的同色扇形的数目的贡献也为 100,从而总的同色扇形数目为

$$100\times100+100\times100=20000.$$

这导致矛盾,表明我们的反设不成立,故命题得证.

3 定义
$$f(x,y,z)=\frac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)},$$
其中 x,y,z 为正实数,求 $f(x,y,z)$ 的值域.

【**解**】$f(x,y,z)$ 的值域为 $\left(1,\frac{9}{8}\right]$,注意到

$$f(x,y,z)=\frac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$=1+\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)},$$

只需说明 $0<\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\leqslant\frac{1}{8}$ 且可取 $\left(0,\frac{1}{8}\right]$ 内的所有值.

注意到 x,y,z 为正实数,左边不等式显然成立.又

$$\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\leqslant\frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y-6xyz\geqslant0$$
$$\Leftrightarrow x(y^2+z^2)-2xyz+y(x^2+z^2)-2xyz+z(y^2+x^2)-2xyz\geqslant0$$
$$\Leftrightarrow x(y-z)^2+y(x-z)^2+z(x-y)^2\geqslant0,$$

最后一式显然成立,当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

下证 $\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ 可取 $\left(0,\frac{1}{8}\right]$ 内的任意值.

令 $y=z=1$,则 $g(x)=\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{x}{2(1+x)^2}$,从而当 $x=1$ 时,$g(x)=\frac{1}{8}$,且 x 趋向于 0 时,$g(x)$ 趋向于 0,由 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 上的连续性知,$g(x)$ 可取 $\left(0,\frac{1}{8}\right]$ 内的任意值.

【**评注**】值域的前半部分还可用基本不等式解决:

$$f(x,y,z)=\frac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$=1+\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\leqslant 1+\frac{xyz}{2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}}=1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}.$$

4 求所有的有序整数组(a,b),使得3^a+7^b为完全平方数.

〖**解**〗显然,a,b均为非负整数.设$3^a+7^b=n^2$(n为正整数),首先两边 mod 4,得

$$n^2=3^a+7^b\equiv(-1)^a+(-1)^b \pmod 4.$$

注意到$n^2\not\equiv 2 \pmod 4$,则a,b必为一奇一偶.下分别讨论:

情形1:a为奇数,b为偶数,设$b=2c$,则

$$3^a=n^2-7^b=(n+7^c)(n-7^c).$$

注意到$n+7^c-(n-7^c)=2\cdot 7^c$不为3的倍数,则$n+7^c$和$n-7^c$不可能均为3的倍数,故必有$n-7^c=1$,从而$3^a=2\cdot 7^c+1$.

若$c=0$,则$a=1$,从而$(a,b)=(1,0)$为一组解.

若$c\geqslant 1$,则$3^a\equiv 1 \pmod 7$,易知使得$3^a\equiv 1 \pmod 7$的最小正整数$a=6$,从而满足上式的a均为6的倍数,这与a为奇数矛盾.

情形2:a为偶数,b为奇数,设$a=2c$,则

$$7^b=n^2-3^a=(n+3^c)(n-3^c).$$

注意到$n+3^c-(n-3^c)=2\cdot 3^c$不为7的倍数,则$n+3^c$和$n-3^c$不可能均为7的倍数,故必有$n-3^c=1$,从而$7^b=2\cdot 3^c+1$.

若$c=1$,则$b=1$,从而$(a,b)=(2,1)$为一组解.

若$c>1$,则$7^b\equiv 1 \pmod 9$.而使得$7^b\equiv 1 \pmod 9$的最小正整数$b=3$,从而满足上式的b均为3的倍数,设$b=3d$,注意到d为大于等于1的奇数,并记$y=7^d$,则$y^3-1=2\cdot 3^c$,从而

$$2\cdot 3^c=(y-1)(y^2+y+1).$$

注意到y^2+y+1为奇数,则

$$y-1=2\cdot 3^u, y^2+y+1=3^v$$

其中u,v为正整数,且$v\geqslant 2$.又由

$$3y=(y^2+y+1)-(y-1)^2,$$

知$9\mid 3y$,从而$3\mid y$,这与$3\mid y-1$矛盾.

综上知,$(a,b)=(1,0)$或$(2,1)$.

5 已知一个给定的平面点集[1]中,任意三点都可被一个半径为1的圆覆盖.求证:这个点集能被一个半径为1的圆覆盖.

[1] 这里的平面点集应为有限集.

【证明】设 D 是能覆盖点集中所有点的半径最小的圆. 下考虑点集中落在圆周上的点.

注意到,若点集中的点均在一段劣弧上,则可将圆朝这些点移动一些,并将半径变得更小一些,仍能保证覆盖点集. 但这与 D 的半径最小性矛盾,故点集中的点不可能都在劣弧上.

若点集中两点恰为圆 D 的一条直径的两端点,则 D 是能覆盖这两点的最小圆,从而半径至多为 1.

若点集中有三个点不在同一段劣弧,则 D 是最小能覆盖这三个点的圆,且半径至多为 1.

若点集中有 3 个以上的点不在同一段劣弧上,则可去掉其中一个,使得剩下的点都不在劣弧上,最后回归到有 3 个点的情形.

事实上,对 D 上的 4 个或更多的点,任取半圆上的 3 个点,则中间的一个点可以去掉.

三、附录部分

附录1 第1～21届加拿大数学奥林匹克试题(1969—1989)

第一届(1969年)

1 证明:如果$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$并且$P_1$、$P_2$、$P_3$不全为零,那么对每个正整数$n$,有$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n=\frac{P_1a_1^n+P_2a_2^n+P_3a_3^n}{P_1b_1^n+P_2b_2^n+P_3b_3^n}$.

2 已知数c大于1,求证两数$\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$,$\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$的一个总是大于另一个.

3 设c是直角三角形斜边的长,另两边的长是a和b,求证:$a+b\leqslant\sqrt{2}c$,等式什么时候成立?

4 设ABC是等边三角形,P是三角形内任意点,作三角形三边的垂线PD、PE、PF,D、E、F是垂足,试证不管P在哪里,总有$\frac{PD+PE+PF}{AB+BC+CA}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

5 设ABC是边长为a、b、c的三角形,角C的平分线交AB于D.求证CD的长是$\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

6 求$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+(n-1)(n-1)!+n\cdot n!$的和,这里$n!=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$.

7 求证方程 $a^2+b^2-8c=6$ 无整数解.

8 设 f 是具有下列性质的函数：

(1) $f(n)$ 对每个正整数 n 有定义；

(2) $f(n)$ 是整数；

(3) $f(2)=2$；

(4) $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$ 对一切 m 和 n；

(5) $f(m)>f(n)$，当 $m>n$ 时.

试证：$f(n)=n$.

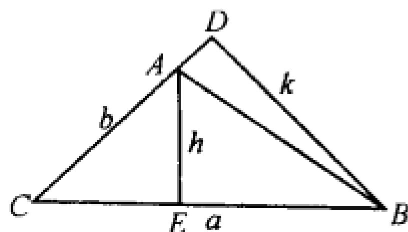
9 证明半径为1的圆内接四边形最短边不大于 $\sqrt{2}$.

10 设 ABC 是等腰直角三角形，它的腰长是1，P 是斜边 AB 上一点，由 P 到其他两边的垂线足是 Q 和 R，考虑三角形 APQ 和 PBR 的面积，以及矩形 $QCRP$ 的面积，证明无论 P 怎样选取，这三个面积中最大的至少是 $2/9$.

第二届(1970年)

1 求所有三数组(x,y,z),使得其中任何一数加上其他两数的积,结果都是2.

2 已知$\triangle ABC$有钝角A和高线长h及k,如图所示,证明$a+h\geqslant b+k$,并求在何时等号成立.



3 已知一组球,每个球染成红色或蓝色,每色至少有一个球,每个球重1磅或2磅,每种重量至少有一个球,证明有两个球具有不同的重量和不同的颜色.

4 (1)求一切正整数,它的首位码是6,去掉这个6,所成整数是原整数的$\frac{1}{25}$.

(2)证明没有这样的整数,去掉它的第一个数码6所得结果是原整数的$\frac{1}{35}$.

5 一个四边形在边长为1的正方形各边上各有一点,证明四边形的边长a、b、c、d满足不等式$2\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 4$.

6 已知三个不共线的点A、B、C,以C为中心作圆,使得由A和B到圆的切线是平行的.

7 证明:由不必相异的五个整数一定可选取其中三个整数,其和能被3整除.

8 考虑一端在直线$y=x$上,另一端在直线$y=2x$上,而其长为4的一切直线段,求这些线段中点轨迹的方程.

9 设$f(n)$是数列

0,1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,…

前n项的和.

(1)给出$f(n)$的公式.

(2)证明$f(s+t)-f(s-t)=st$,其中s和t是正整数,并且$s>t$.

10 已知有整系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的多项式

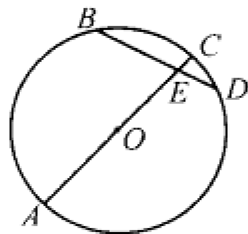
$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

又已知存在四个不同的整数 a,b,c,d，使得

$$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=5,$$

证明：没有整数 k，使得 $f(k)=8$.

第三届(1971年)



1 设 DEB 是圆的弦，$DE=3$，$EB=5$. 又 O 是圆心，连结 OE 且延长交圆于 C(如图). 已知 $EC=1$. 求圆的半径.

2 设 x 和 y 是正实数，且 $x+y=1$，证明：$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9$.

3 设 $ABCD$ 是四边形，$AD=BC$. 如果 $\angle ADC>\angle BCD$，证明 $AC>BD$.

4 确定一切实数 a 使两个多项式 x^2+ax+1 和 x^2+x+a 至少有一个公共根.

5 设 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，其中系数 a_i 是整数. 如果 $P(0)$ 和 $P(1)$ 都是奇数，证明：$P(x)$ 没有整数根.

6 证明：对一切整数 n，$n^2+2n+12$ 不是 121 的倍数.

7 设 n 是五位数(第一位数码不是零)，m 是由 n 取消它的中间一位数码后所成的四位数. 试确定一切 n 使得 n/m 是整数.

8 正五边形内接于半径为 r 的圆，P 是五边形内任意点，由 P 作垂线到各边或其延长线上.

(1)证明这些垂线长是常数；

(2)用半径 r 表示这个常数.

9 长 h 和 k 的两根旗杆竖在水平面上，相隔 $2a$ 单位，求平面上对杆顶仰角相等的一切点的集合.

10 假定 n 个人各恰好知道一个消息，而所有 n 个消息都不相同. 每次“A”打电话给“B”，“A”都把所知道的一切告诉“B”，而“B”却不告诉“A”什么消息. 为了使各人都知道一切消息，求所有需要两人之间通话的最少次数. 证明你的答案是正确的.

第四届(1972 年)

1　给定三个单位圆，两两相切，求切于所有这三个圆的半径.

2　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非负实数，定义 M 为一切乘积 $a_ia_j\ (i<j)$ 的和，即

$$M=a_1(a_2+a_3+\cdots+a_n)+a_2(a_3+a_4+\cdots+a_n)+\cdots+a_{n-1}a_n.$$

证明：数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 至少有一个的平方不超过 $\frac{2M}{n(n-1)}$.

3　(1)证明 10201 在大于 2 的任何进位制记数法中都是合数.

(2)证明 10101 在任何进位制记数法中都是合数.

4　叙述四边形 $ABCD$ 的作法，已知：

(1)所有四边的长；

(2)AB 与 CD 平行；

(3)BC 与 DA 不相交.

5　证明方程 $x^3+11^3=y^3$ 没有正整数解.

6　设 a 和 b 是相异的实数. 证明存在整数 m 和 n 使得

$$am+bn<0, bm+an>0.$$

7　(在下面三问题中不用数表、计算器等等作为“辅助”.)

(1)证明满足 $x=(x^2+1)/198$ 的 x 的值在 $1/198$ 和 $197.99494949\cdots$ 之间；

(2)用(1)的结果证明 $\sqrt{2}<1.41\dot{4}2135\dot{6}$；

(3)$\sqrt{2}<1.41421356$，对吗？

8　在某次竞选运动中，各个政党共作出 p 种不同的诺言($p>0$)，某些政党可以作出相同的诺言，任何两党都至少有一种公共诺言，但没有两党作出全部相同的诺言. 证明：政党的个数不多于 2^{p-1}.

9 在平面内已知四条不同的直线 l_1, l_2, l_3, l_4；l_1 和 l_2 分别平行于 l_3 和 l_4，求到四直线距离的和是常数的动点轨迹.

10 在公比大于 1 的等比数列中，最多有几项是在 100 和 1000 之间的整数?

第五届(1973年)

1　(1)解不等式组$\begin{cases}x<\dfrac{1}{4x},\\ x<0.\end{cases}$

(2)同时满足两个不等式$4x+13<0$和$x^2+3x>16$的最大整数是什么?

(3)给出在11/24和6/13之间的有理数.

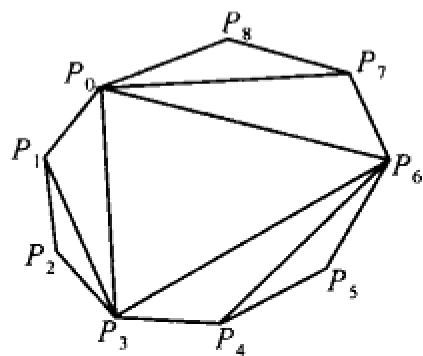
(4)把100000表示为两个整数的乘积,使其中没有一个是10的倍数.

(5)不用对数表,计算$\dfrac{1}{\log_2 36}+\dfrac{1}{\log_3 36}$.

2　求满足方程$|x+3|-|x-1|=x+1$的一切实数.

3　证明:若p和$p+2$都是大于3的素数,那么6是$p+1$的因数.

4　下图表示有九个顶点的凸多边形.已经画出的六条对角线分割多边形为七个三角形:$P_0P_1P_3$,$P_0P_3P_6$,$P_0P_6P_7$,$P_0P_7P_8$,$P_1P_2P_3$,$P_3P_4P_6$,$P_4P_5P_6$.



有多少方法可以把这些三角形命名为$\triangle_1,\triangle_2,\cdots,\triangle_7$,使得$P_i$是三角形$\triangle_i$的一个顶点,$i=1,2,3,4,5,6,7$?证明你的答案.

5　对每个正整数n,设$h(n)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.例如$h(1)=1,h(2)=1+\dfrac{1}{2}$,$h(3)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$,对$n\geqslant 2$,证明:$n+h(1)+h(2)+\cdots+h(n-1)=nh(n)$.

6　若A和B是已知圆上的定点,与圆心O不共线,XY是变动直径,求P通过A、X的直线和通过B、Y的直线的交点的轨迹.

7　观察$\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$;$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}$;$\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}$;$\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{20}$.

由这些例子的启发,叙述一般规律,并加以证明.对任何大于1的整数n,证明:存在正整数i和j,使得

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\frac{1}{(i+2)(i+3)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)}.$$

第六届(1974 年)

A 部

1 (1)如果 $x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,求证:

$$y^{x}=x^{y}.$$

(2)对一切正整数 n,证明

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^n(n-1)^2+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}(1+2+\cdots+n).$$

2 设 $ABCD$ 是矩形,$BC=3AB$,证明:如果 P、Q 是 BC 边上的点,$BP=PQ=QC$,那么$\angle DBC+\angle DPC=\angle DQC$.

B 部

3 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 是多项式,系数满足条件:$0\leqslant a_i\leqslant a_0$,$i=1,2,\cdots,n$. 设 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_{2n}$是多项式

$$\{f(x)\}^2=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)^2=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_{2n}x^{2n}$$

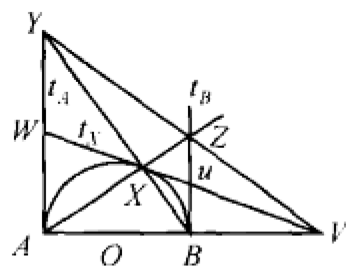
的系数. 证明 $b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}(f(1))^2$.

4 设 n 是固定的正整数,对于满足 $0\leqslant x_i\leqslant1$,$i=1,2,\cdots,n$ 的任何 n 个实数,对应着和式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|=|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+\cdots+|x_1-x_{n-1}|+|x_1-x_n|+|x_2-x_3|+|x_2-x_4|+\cdots+|x_2-x_{n-1}|+|x_2-x_n|+\cdots+|x_{n-2}-x_{n-1}|+|x_{n-2}-x_n|+|x_{n-1}-x_n|.$$

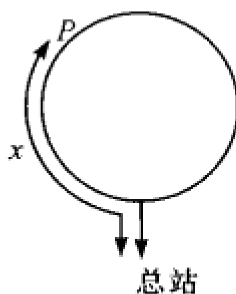
设 $S_{(n)}$ 表示和式的最大可能值. 求 $S_{(n)}$.

5 已知直径为 AB 的圆和圆上另一点 X. 设 t_A、t_B 和 t_X 分别是这个圆在 A、B、X 的切线. 设 Z 是直线 AX 与 t_B 交点,Y 是直线 t_A 与 BX 的交点. 证明:三直线 YZ、t_X、AB 共点或平行.



6　8 分和 15 分的邮票可以无限制地取用．某些邮资额数，例如 7 分、29 分，不能够刚好凑成，求不能凑成的最大额数 n，即大于 n 的额数都能够凑成(证明你的答案)．

7　汽车路线由周长 10 英里的环路和从总站到环路上 Q 点长 1 英里的直线组成(如图)，两部汽车在路上服务，每部周游需要 20 分，1 号车离开总站，沿着直路走，按顺时针方向绕环路一次．又沿直线回到总站．2 号车到达总站比 1 号车迟 10 分，走同样的路线，但按反时针方向绕行环路．两部车连续行驶，在路上的任何地点都不耽搁，只有让乘客上、下车的时间可以忽略．



一个人打算在地点 P 候车，那里沿 1 号车路线离开总站 x 英里($0\leqslant x<12$)，要搭车到总站去．假定他搭上使他尽早达到目的地的汽车，他的旅行所需的最长的时间为 $W(x)$(候车时间加乘车时间)．

求 $W(2)$、$W(4)$．

对于 x 的什么值，时间 $W(x)$ 最长？

对 $0\leqslant x<12$ 画出 $y=W(x)$ 的草图．

第七届(1975年)

1 化简$\left(\dfrac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\cdots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+\cdots+n\cdot 3n\cdot 9n}\right)^{\frac{1}{3}}$.

2 数列$a_1,a_2,a_3,\cdots$满足

(1)$a_1=\dfrac{1}{2}$,(2)$a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2a_n(n\geqslant 1)$.

确定a_n的值$(n\geqslant 1)$.

3 对每个实数r,$[r]$表示小于或等于r的最大整数,例如$[6]=6$,$[\pi]=3$,$[-1.5]=-2$,在(x,y)平面上指示满足$[x]^2+[y]^2=4$的一切点(x,y).

4 对于像3.27这样的正数,3叫做这个数的整数部分,27叫做小数部分,求一个正数它的小数部分、它的整数部分和这个数本身是等比数列的连续三项.

5 A,B,C,D是圆周上"相继的"四点,P,Q,R,S分别是弧AB,BC,CD,DA的中点,证明$PR\perp QS$.

6 (1)15个席位同等地围绕着圆桌安排,席上有15个客人的名片,客人们没有注意这些名片,直到他们坐下来,才发觉没有一个人坐在自己的名片前面.证明可以转动圆桌使得至少有两个客人同时对号入座.

(2)举出一种入席顺序的例子,使这15个人中恰好有一个客人对号入座,而转动圆桌并不能使更多的客人对上号.

7 如果存在正数p使得对一切x都有$f(x+p)=f(x)$,那么$f(x)$就是周期函数.例如,$\sin x$是周期为2π的周期函数.问$\sin(x^2)$是周期函数吗?

8 设k是正整数,求一切多项式

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

其中a_i是实数,满足等式$P(P(x))=[P(x)]^k$.

第八届(1976 年)

1　给定成等比数列的四个砝码和一架等臂天平，说明怎样只用这天平两次就找出最重的砝码.

2　对各个正整数 $n \geqslant 1$，假设

$$n(n+1)a_{n+1}=n(n-1)a_n-(n-2)a_{n-1}.$$

已知 $a_0=1, a_1=2$，求

$$\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{50}}{a_{51}}.$$

3　两个七年级学生被允许参加八年级学生所组成的象棋比赛，每个选手都同其他每个选手比赛一次，胜就得一分，和就得半分，输就得零分. 两个七年级学生共得了 8 分，每个八年级学生都和他的同年级同学得到同样分数. 问有几个八年级的学生参加象棋比赛？答案是唯一的吗？

4　设 AB 是圆的直径，C 是这个直径上 A 和 B 之间的任一固定点，Q 是圆周上的变动点，设 P 是由 Q 和 C 所确定的直线上的点，且 $\frac{AC}{CB}=\frac{QC}{CP}$，描述并证明 P 点的轨迹.

5　证明：一个正整数是至少两个连续正整数的和，必须而且只须它不是 2 的乘幂.

6　如果 A、B、C、D 是空间中四点，且 $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=\pi/2$. 证明 A、B、C、D 共面.

7　设 $P(x,y)$ 是两个变量 x,y 的多项式，对各个 x,y，有 $P(x,y)=P(y,x)$ (例如多项式 $x^2-2xy+y^2$ 就满足这个条件).

已知 $(x-y)$ 是 $P(x,y)$ 的因子，证明 $(x-y)^2$ 是 $P(x,y)$ 的因子.

8　连结圆周上 9 个不同点的 36 条直线染成红色或蓝色，假定由 9 点中每 3 点所确定的三角形都至少含有一条红色边. 证明有四点，其中每两点的连线都是红色的.

第九届(1977 年)

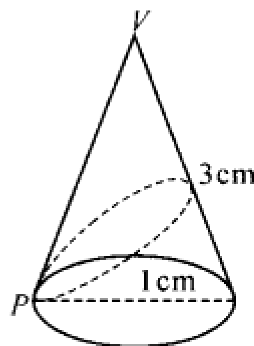
1 如果 $f(x)=x^2+x$,证明方程 $4f(a)=f(b)$没有正整数 a 和 b 的解.

2 设 O 是圆心,A 是圆内不同于 O 的固定点,确定圆周上所有的点 P 使$\angle OPA$ 极大.

3 N 是整数,它的 b 进制表示是 777.求最小的正整数 b,使得 N 是整数的四次方.

4 设多项式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 和 $q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 是两个整系数多项式.假定 $p(x)\cdot q(x)$的系数均为偶数,但是它们不完全被 4 整除.证明 $p(x)$和 $q(x)$之一有全部偶系数,另一至少有一个奇系数.

5 已知正圆锥的底面半径是 1cm,斜高 3cm.P 是底面圆周上一点,由 P 绕过圆锥回到 P 的最短路线如图所示,由顶点 V 到这条路线的最小距离是什么?



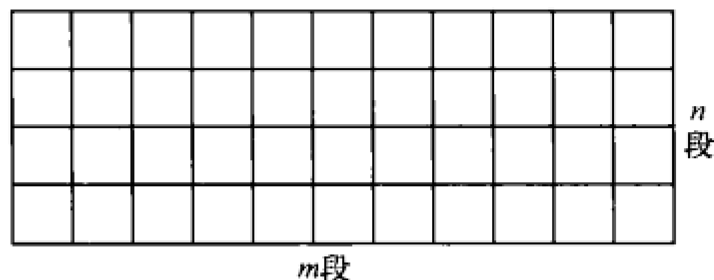
6 设 $0<\mu<1$,且定义

$$\mu_1=1+\mu,\mu_2=\frac{1}{\mu_1}+\mu,\cdots,$$

$$\mu_{n+1}=\frac{1}{\mu_n}+\mu,n\geqslant 1.$$

对 n 的一切值 1,2,3,…,证明 $\mu_n>1$.

7 矩形城市恰好有 m 段长和 n 段宽(见图),一个妇女住在城市的西南角,工作在东北角,她每天步行去工作,但是在任何给定的行程上,她确信她的路线不包任何交叉点两次,证明她所能采取的路线数目 $f(m,n)$满足 $f(m,n)\leqslant 2^{mn}$.



第十届(1978年)

1　设 n 是整数，如果 n^2 的十位数字是7，那么 n^2 的个位数字是什么？

2　求满足方程 $2a^2=3b^3$ 的一切正整数对 a、b.

3　确定最大的实数 z，使得

$$x+y+z=5,\ xy+yz+zx=3,$$

并且 x，y 也是实数.

4　凸四边形 $ABCD$ 的边 AD 和 BC 延长相交于 E，设 H 和 G 是 BD 和 AC 的中点.求 $\triangle EHG$ 的面积对四边形 $ABCD$ 面积的比.

5　两个女孩 Eve 和 Odette 在 3×3 棋盘上用黑棋子和白棋子对局，规则如下：

(a)她们轮流下子，每次将一个棋子放到空格上.

(b)每次，她们可以下白子，也可以下黑子，且不必要总是同色.

(c)当棋盘填满的时候，某一行、列或对角线有偶数个黑棋子，Eve 就得到1分，而某一行、列或对角线有奇数个黑棋子，Odette 就得到1分.

(d)棋手至少得到8分中的5分才能算胜.

(ⅰ)4—4和局是否可能？说明之.

(ⅱ)叙述先下的女孩的取胜策略.

6　作出 $x^3+xy+y^3=3$ 的图象.

第十一届(1979年)

1 已知$a,b>0$,且a,A_1,A_2,b成等差数列,a,G_1,G_2,b成等比数列.求证:$A_1A_2\geqslant G_1G_2$.

2 求证:四面体各二面角之和不是常量.

3 已知a,b,c,d,e为整数,且$1\leqslant a<b<c<d<e$.求证:

$$\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,d]}+\frac{1}{[d,e]}\leqslant\frac{15}{16}.$$

其中$[m,n]$表示m和n的最小公倍数.

4 在一块圆形场地上狗追兔子.兔子沿圆周跑动,开始时狗处在圆心,它以与兔子相同的速度奔跑,并且每个时刻都处在兔子与圆心的连线段上.求证,兔子跑过四分之一圆周时被狗追到.

5 在坐标平面上每步沿东,南,西,北四个方向之一走过距离1.不经过同一点两次的路线称为自避路线.设从原点出发的n步自避路线条数为$f(n)$.

试求$f(1),f(2),f(3),f(4)$,并证明对一切n,有

$$2^n<f(n)\leqslant 4\cdot 3^{n-1}.$$

第十二届(1980年)

1　设$a679b$是一个十进制的五位数，可被72除尽，试决定a与b的值.

2　从1到50各数分别打印在各张卡片上，这些卡片搅乱，然后字面向上排成5行，每行10张，重排每行的卡片，使它们从左到右的数目增大. 然后重排每列的卡片，使它们从上到下的数目增大，在最后的排列中，各行卡片是否从左到右的数仍增大？

3　有定角A和定半径r的内切圆的一切三角形中，试决定哪一个三角形有最小的周长.

4　抛掷一个硬币，每次正面出现得1分，反面出现得2分. 试证恰好得到n分的概率是$\frac{1}{3}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

5　平行六面体有这样的性质：平行任何一定面F的所有横截面都有和F有相同的周长. 试确定是否有其他多面体有这个性质.

第十三届(1981年)

1 对任意的实数，用$[t]$表示小于或等于t的最大整数. 例如$[8]=8$，$[\pi]=3$，$\left[-\frac{5}{2}\right]=-3$. 试证：方程

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$

没有实数解.

2 给定半径为r的圆上定点P的切线l，由此圆上动点R引RQ垂直于l，交l于Q. 试确定面积最大的$\triangle PQR$.

3 (1)在平面P上给定一有限的直线集，试证：在P内存在任意大的圆与这些直线都不相交.

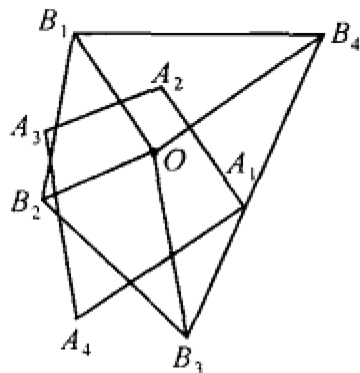
(2)证明：在P内存在一无限可列的直线集，使P内任一圆至少与此集内一直线相交(点不认为是圆).

4 $P(x)$和$Q(x)$为两个多项式，它们对于一切实数x，均满足恒等式$P(Q(x))\equiv Q(P(x))$.

若方程$P(x)=Q(x)$无实数解，试证方程$P(P(x))=Q(Q(x))$亦无实数解.

5 十一个剧团参加汇演. 每天都排定其中的某些剧团演出，其余的剧团则跻于普通观众之列. 在汇演结束时，每个剧团除了自己的演出日外，至少观看过每个其他剧团的一次表演. 问这样的汇演至少要安排几天？

第十四届(1982 年)



1　图中 $OB_i \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} A_iA_{i+1}$，其中 $i=1,2,3,4(A_5=A_1)$.

证明：$B_1B_2B_3B_4$ 的面积为 $A_1A_2A_3A_4$ 的面积的二倍.

2　若方程 $x^3-x^2-x-1=0$ 的根为 a,b,c.

(1)证明 a,b,c 互不相同；

(2)证明$\frac{a^{1982}-b^{1982}}{a-b}+\frac{b^{1982}-c^{1982}}{b-c}+\frac{c^{1982}-a^{1982}}{c-a}$为整数.

3　R^n 为 n 维欧几里得空间，如果 R^n 中的一个点集使 R^n 中每一点至少与这集中一个点的距离为无理数，试求这个点集中的最小个数 $g(n)$.

4　P 为集合 $S_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$的一个排列，一个元素 $j\in S_n$，如果满足 $p(j)=j$，则称为 P 的一个不动点，令 f_n 为 S_n 的无不动点的排列个数，g_n 为恰好有一个不动点的排列个数.

证明：$|f_n-g_n|=1$.

5　将四面体 $ABCD$ 的高分别向外延长至 A',B',C',D'，且 $AA'=\frac{k}{h_a}$，$BB'=\frac{k}{h_b}$，$CC'=\frac{k}{h_c}$，$DD'=\frac{k}{h_d}$，其中 k 为常数，h_a 表示 $ABCD$ 的自点 A 引出的高，等等.

证明四面体 $A'B'C'D'$的重心与四面体 $ABCD$ 的重心重合.

第十五届(1983年)

1 求满足 $w!=x!+y!+z!$ 的所有正整数 w、x、y、z.

2 对每个实数 r,设 T_r 是平面上变点 (x,y) 为点 $(2^r x, r2^r x+2^r y)$ 的变换.设 F 是所有这样变换的集合,即

$$F=\{T_r \mid r\text{ 是实数}\}.$$

求所有曲线 $y=f(x)$,它们的图象在 F 中各个变换下保持不变.

3 三角形的面积由它的边长确定.四面体的体积是否由其各面的面积确定?

4 证明:对每个素数 p,有无穷多正整数 n 使得 p 整除 2^n-n.

5 k 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的几何平均(GM)定义为它们的乘积的 k 次方根.例如,3,4,8 的 GM 是 6.证明:n 个正数的集合 S 的 GM 等于 S 所有非空子集的诸 GM 的 GM.

第十六届(1984 年)

1　证明 1984 个连续正整数的平方和不是一个整数的平方.

2　阿丽丝和鲍勃来到一家五金店.店里出售带色穗带,可以把它们系在钥匙上,将不同的钥匙区别开.下面是他们二人的一段对话:

阿丽丝:你打算买一些彩色穗带系在你的钥匙上吗?

鲍勃:我很想这样做,但穗带只有 7 种不同的颜色,而我却有 8 把钥匙.

阿丽丝:这没有关系,因为即使有两把钥匙都系上红色穗带,但你只要注意它们是与系绿色穗带的钥匙相邻,还是与系蓝色穗带的钥匙相邻,就可以把它们区分开.

鲍勃:你当然知道我的全部钥匙都套在一个钥匙圈上,而钥匙圈是可以翻来翻去,转来转去的,所以在说到“相邻”或者“前面有三把”一类话时一定要注意.

阿丽丝:即使是这样,你也不需要 8 种颜色的穗带.

试问:为了区分 n 把套在同一个钥匙圈上的钥匙,至少需要多少种颜色的穗带?

3　一个整数称为可被其数字和整除.如果:(1)它的数字都不为 0;(2)它可以被它的数字和整除(例如 322 可被其数字和整除).证明:有无限多个可被数字和整除的整数.

4　一个锐角三角形面积为 1,证明在三角形内有一点到每个顶点的距离至少为 $\left(\frac{16}{27}\right)^{\frac{1}{4}}$.

5　任给 7 个实数,证明其中有两个数,设为 x,y,满足

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

第十七届(1985 年)

1 一个三角形三边之长为 6,8,10,求证:仅仅存在一条直线同时平分这个三角形的面积和周长.

2 求证:不存在这样的整数,把它的首位数字移到末位之后,得到的数是原数的两倍.

3 给定的圆周长为 C. 用 x 与 y 分别表示此圆的外切正 1985 边形的周长与内接正 1985 边形的周长,试证明:$x+y\geqslant 2C$.

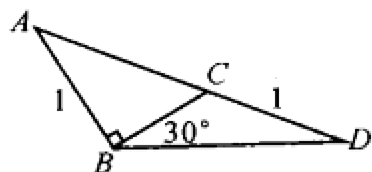
4 求证:2^{n-1} 整除 $n!$,当且仅当存在某个正整数 k,使得 $n=2^{k-1}$.

5 设 $1<x_1<2$,对于 $n=1,2,3,\cdots$,定义

$$x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2.$$

求证:对于 $n\geqslant 3$,有 $|x_n-\sqrt{2}|<2^{-n}$.

第十八届(1986年)



1　如图，$AB=CD=1$，$\angle ABC=90°$，$\angle CBD=30°$，求 AC.

2　有一种体育竞赛共含 M 个项目，有运动员 A、B、C 参加，在每一项目中，第一、二、三名分别得 p_1,p_2,p_3 分，其中 p_1,p_2,p_3 为正整数，且 $p_1>p_2>p_3$. 最后 A 得 22 分，B 与 C 均得 9 分，B 在百米赛中取得第一，求 M 的值，并问在跳高中谁得第二名？

3　定长的弦 ST 在一个以 AB 为直径的半圆周上滑动. M 是 ST 的中点，P 是 S 对 AB 的作垂线的垂足.

求证：不管 ST 滑到什么位置，$\angle SMP$ 是一定角.

4　对于正整数 n 与 k，定义 $F(n,k)=\sum\limits_{r=1}^{n} r^{2k-1}$.

求证：$F(n,1)$ 可以整除 $F(n,k)$.

5　设 $u_1,u_2,u_3,\cdots$ 是一个整数列，适合逆推关系

$$u_{n+2}=u_{n+1}^2-u_n,$$

设 $u_1=39$，$u_2=45$. 求证：1986 可整除这个数列的无穷多项.

第十九届(1987 年)

1　求出 $a^2+b^2=n!$ 的所有解. 这里 a,b,n 为正整数,并且满足 $a\leqslant b,n<14$.

2　设 1987 可以在 b 进制中写出三位数 $\overline{xyz}$ 且 $x+y+z=1+9+8+7$,试确定出所有可能的 x,y,z 及 b.

3　$ABCD$ 为平行四边形,E 在线段 BC 内部. 如果 $\triangle DEC$,$\triangle BED$ 及 $\triangle BAD$ 都是等腰三角形,求 $\angle DAB$ 可能取哪些值.

4　在一块平地上有 n 个人,对每个人,他到其他人的距离均不相同. 每人都有一把水枪,当发出失火信号时,每人用枪击中距他最近的人.

当 n 为奇数时,证明至少有一人身上是干的. 当 n 为偶数时,这个结论是否永远正确.

5　对每一个正整数 n,证明

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}].$$

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

第二十届(1988 年)

1　对怎样的数值 b，方程 $1988x^2+bx+8891=0$ 及 $8891x^2+bx+1988=0$ 有一个公共的根.

2　一个房屋的地基呈三角形状，这三角形的周长为 p 米，面积为 A 平方米，花园由距离地基的边界 5 米之内的土地形成.

问房屋连同花园共占地多少？

3　设 S 为平面上的一个有限点集(含点数$\geqslant 5$)，其中的若干点涂上红色，其余的点涂上蓝色. 设任何三个及三个以上的同色的点不共线.

求证：存在一个三角形，使得

(1)它的三个顶点涂有相同的颜色；

(2)这三角形至少有一条边上不包含另一种颜色的点.

4　设 $x_0=0$，$x_1=1$，且 $x_{n+1}=4x_n-x_{n-1}$，$y_0=1$，$y_1=2$，且 $y_{n+1}=4y_n-y_{n-1}$.

求证：对一切整数 $n\geqslant 0$，有 $y_n^2=3x_n^2+1$.

5　设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 是整数的一个集合，其中 $r>1$. 对于 S 的非空子集 A，定义 $p(A)$ 为 A 中的一切整数的乘积. 设 $m(S)$ 表示 $p(A)$ 的算术平均数，这里 A 过 S 的一切非空子集.

若 $m(S)=13$，且有一正整数 a_{r+1} 使得 $m(S\cup\{a_{r+1}\})=49$，试确定 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 及 a_{r+1} 的值.

第二十一届(1989 年)

1 整数 $1,2,\cdots,n$ 的排列满足:每个数或者大于它之前的所有数,或者小于它之前的所有数.试问有多少个这样的排列?

2 $\triangle ABC$ 是面积等于 1 的直角三角形. A',B',C' 分别是 A,B,C 关于各自对边的反射点.求 $\triangle A'B'C'$ 的面积.

3 定义 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如下: $a_1=1989^{1989}$,且 $a_n(n>1)$ 等于 a_{n-1} 的各位数字之和. a_5 等于多少?

4 有五只猴子和五个梯子.每个梯子的顶端各放一根香蕉.梯子之间有若干绳子相连,每条绳子连接两个梯子的两级,任一梯子的同一级上没有两条绳子接入.开始时五只猴子分别位于不同梯子的底端,它们沿梯子上爬,每遇到绳子都沿之爬到另一端,然后继续上爬.

求证:无论有多少绳子,最后每只猴子都各拿到一根香蕉.

5 已给数 $1,2,2^2,\cdots,2^{n-1}$.对于它们的任一排列 $\sigma=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,定义 $S_1(\sigma)=x_1,S_2(\sigma)=x_1+x_2,S_3(\sigma)=x_1+x_2+x_3,\cdots,S_n(\sigma)=x_1+x_2+\cdots+x_n$.并令 $Q(\sigma)=S_1(\sigma)\cdot S_2(\sigma)\cdots S_n(\sigma)$.试求 $\sum\frac{1}{Q(\sigma)}$.(和式取遍所有的排列).

附录 2　加拿大代表队在历届 IMO 中成绩一览

第 22 届 IMO(1981 年)
领队:Geoffrey Butler (University of Alberta)
副领队:Edward Barbeau (University of Toronto)
团体总分第 7 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
David Ash	7	7	7	7	7	7	42	1	金牌
Georges Gonthier	7	7	7	7	7	7	42	1	金牌
Charles S. Timar	7	6	5	6	6	7	37	50	银牌
John Chew	7	7	2	6	6	7	35	65	银牌
Julian West	1	2	5	7	7	7	29	90	铜牌
Arthur Baragar	0	7	0	5	6	7	25	104	
David Bernier	0	2	7	7	0	7	23	113	
John Bowman	1	2	0	3	3	7	16	136	

第 23 届 IMO(1982 年)
领队:Geoffrey Butler (University of Alberta)
副领队:Edward Barbeau (University of Toronto)
团体总分第 17 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Charles S. Timar	7	0	3	6	7	6	29	31	铜牌
Alastair Rucklidge	4	1	2	7	7	2	23	49	铜牌
Todd Cardno	3	0	2	0	7	2	14	81	
Edward D. Hatton	7	0	2	3	0	0	12	89	

第 24 届 IMO(1983 年)
领队:Edward Barbeau (University of Toronto)
副领队:Geoffrey Butler (University of Alberta)
团体总分第 14 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Martin Piotte	1	6	4	7	0	7	25	37	铜牌
Michael Clase	3	2	7	7	0	3	22	52	铜牌
Neale Ginsburg	7	2	2	7	0	0	18	73	铜牌
William Rucklidge	1	7	0	7	2	0	17	78	铜牌
Mike Molloy	3	0	4	3	0	4	14	94	
Bruce Sutherland	1	2	0	0	3	0	6	131	

第 25 届 IMO(1984 年)
领队:(University of Victoria)
副领队:Edward Barbeau (University of Toronto)
团体总分第 20 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Martin Piotte	7	7	0	7	0	0	21	69	铜牌
Mike Molloy	7	2	1	0	6	0	16	99	
Mike Bradley	5	0	0	7	3	0	15	104	
Vo Minh Tue	3	1	0	7	3	1	15	104	
Frank D'Ippolito	5	5	0	2	0	0	12	118	
Lily Yen	3	0	0	1	0	0	4	160	

第 26 届 IMO(1985 年)
领队:Ronald Scoins (University of Waterloo)
副领队:Thomas Griffiths (A. B. Lucas Secondary School)
团体总分第 12 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Minh Tue Vo	7	7	1	2	7	4	28	27	银牌
Eric Veach	7	7	1	4	0	1	20	54	铜牌
Martin Piotte	7	7	0	1	2	1	18	65	铜牌
Frank D'Ippolito	7	7	0	1	0	1	16	83	铜牌
Moses Klein	1	7	0	7	0	0	15	93	铜牌
Giuseppe Russo	1	7	0	0	0	0	8	147	

第 27 届 IMO(1986 年)
领队:Ronald Scoins(University of Waterloo)
副领队:Ronald Dunkley(University of Waterloo)
团体总分第 16 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Ravi Vakil	7	7	0	7	6	5	32	22	银牌
Steven Siu	7	7	1	1	6	7	29	40	银牌
Giuseppe Russo	7	5	1	3	2	0	18	94	铜牌
Rocky Lee	1	0	0	4	4	5	14	121	
Bryan Feir	7	5	0	1	1	0	14	121	
Alexandru Romosan	2	0	0	0	3	0	5	189	

第 28 届 IMO(1987 年)
领队:Bruce Shawyer(Memorial University of Newfoundland)
副领队:Ronald Scoins(University of Waterloo)
团体总分第 16 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Ravi Vakil	7	7	7	7	7	7	42	1	金牌
Colin Springer	7	7	5	5	7	2	33	55	银牌

Rocky Lee	4	7	0	1	6	1	19	113	铜牌
Stephen Fry	1	6	0	7	3	0	17	121	
Gavin MacBeath	0	7	0	3	7	0	17	121	
David Lee	2	7	1	0	1	0	11	151	

第 29 届 IMO(1988 年)
领队:Bruce Shawyer(Memorial University of Newfoundland)
副领队:Ronald Scoins(University of Waterloo)
团体总分第 10 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Ravi Vakil	7	7	7	7	5	7	40	8	金牌
Patrick Surry	7	3	1	7	7	0	25	52	银牌
Colin Springer	7	7	1	6	1	0	22	66	铜牌
David McKinnon	1	6	1	0	7	0	15	113	铜牌
Gurraj Sangha	4	0	0	0	7	0	11	150	荣誉奖
Philip Jong	4	0	1	0	5	1	11	150	

第 30 届 IMO(1989 年)
领队:Richard Nowakowski (Dalhousie University)
副领队:Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)
团体总分第 19 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Philip Jong	6	7	1	7	7	7	35	32	银牌
Jeffrey Higham	7	5	0	7	7	0	26	98	铜牌
Hugh Thomas	3	3	2	7	7	0	22	114	铜牌
Ian Goldberg	7	0	0	1	7	6	21	122	铜牌
Andrew Chow	7	3	0	1	0	0	11	190	荣誉奖

James Law	0	0	0	1	7	0	8	209	荣誉奖

第 31 届 IMO(1990 年)
领队:Richard Nowakowski (Dalhousie University)
副领队:Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)
团体总分第 11 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Danny Brown	3	7	7	7	7	1	32	29	银牌
Ian Goldberg	7	3	2	7	7	3	29	37	银牌
Jeffrey Grossman	7	2	2	7	7	3	28	44	银牌
Etsuko Amano	7	1	1	1	6	4	20	96	铜牌
Andrew Chow	7	1	2	1	3	1	15	156	荣誉奖
Hugh Thomas	0	3	1	0	7	4	15	156	荣誉奖

第 32 届 IMO(1991 年)
领队:Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)
副领队:Ravi Vakil (University of Toronto)
团体总分第 14 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Ian Goldberg	7	7	4	7	7	7	39	18	金牌
Jeffrey Grossman	7	7	5	7	7	3	36	39	银牌
Adam Logan	7	7	5	7	5	1	32	61	银牌
Peter Milley	7	2	6	7	0	0	22	126	铜牌
Mark van Raamsdonk	7	2	3	5	4	0	21	133	铜牌
Ka-Ping Yee	3	2	0	7	2	0	14	186	荣誉奖

第 33 届 IMO(1992 年)
领队:Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)

副领队:Ravi Vakil (University of Toronto)
团体总分第 22 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Jeffrey Grossman	7	7	7	7	3	5	36	9	金牌
Naoki Sato	7	2	0	7	0	5	21	93	铜牌
Alexander Nicholson	6	4	3	1	0	2	16	125	铜牌
Kevin Kwan	7	4	0	2	0	2	15	133	铜牌
Eric Lai	0	2	0	7	0	2	11	180	荣誉奖
Kevin Cheung	0	2	0	4	0	0	6	238	

第 34 届 IMO(1993 年)
领队:Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)
副领队:Ravi Vakil (University of Toronto)
团体总分第 18 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Ka-Ping Yee	7	7	0	6	7	7	34	12	金牌
Naoki Sato	6	7	0	3	4	2	22	73	铜牌
Edward Leung	6	4	0	2	4	3	19	102	铜牌
Alex Lee	0	5	0	2	6	5	18	111	铜牌
Kevin Purbhoo	0	7	0	2	7	0	16	133	铜牌
Peter Dukes	0	0	1	1	1	1	4	311	

第 35 届 IMO(1994 年)
领队:Richard Nowakowski (Dalhousie University)
副领队:Ravi Vakil (University of Toronto)
团体总分第 24 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Edward Leung	7	7	7	7	7	5	40	28	金牌
Kevin Purbhoo	7	7	7	2	6	0	29	95	铜牌
Robert Bridson	4	7	6	1	6	0	24	132	铜牌
Alyssa Ker	7	7	2	2	2	0	20	176	铜牌
Cyrus Hsia Chen	2	7	1	2	2	3	17	205	荣誉奖
Christopher Ian Hendrie	1	3	6	1	1	1	13	254	

第 36 届 IMO(1995 年)
领队:Richard Nowakowski (Dalhousie University)
副领队:Georg Gunther (Sir Wilfred Grenfell College)
团体总分第 19 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Cyrus Hsia Chen	7	7	7	7	7	0	35	36	银牌
Frédéric Latour	7	0	6	7	5	6	31	73	银牌
Byung-Kyu Chun	7	0	5	6	7	0	25	137	铜牌
Donny Cheung	7	0	4	7	7	0	25	137	铜牌
Alyssa Ker	3	0	2	7	7	0	19	193	铜牌
Lawrence Tang	7	0	4	7	0	0	18	202	荣誉奖

第 37 届 IMO(1996 年)
领队:J. P. Grossman (University of Toronto)
副领队:Ravi Vakil (Harvard University)
团体总分第 16 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Derek Kisman	7	0	7	1	0	7	22	71	银牌
Soroosh Yazdani	4	1	2	7	1	7	22	71	银牌

Richard Hoshino	6	0	2	7	0	7	22	71	银牌
Byung-Kyu Chun	5	7	2	3	0	1	18	111	铜牌
Adrian Chan	2	1	3	1	0	7	14	150	铜牌
Sabin Cautis	2	1	2	1	0	7	13	164	铜牌

第 38 届 IMO(1997 年)
领队:Richard Nowakowski (Dalhousie University)
副领队:Naoki Sato (University of Toronto)
团体总分第 29 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Byung-Kyu Chun	4	1	7	6	6	5	29	70	银牌
Adrian Chan	1	7	3	7	7	0	25	100	银牌
Mihaela Enachescu	4	7	0	3	7	0	21	142	铜牌
Sabin Cautis	2	0	0	7	7	0	16	200	铜牌
Jimmy Chui	1	1	0	7	1	0	10	285	荣誉奖
Adrian Birka	4	0	1	0	1	0	6	356	

第 39 届 IMO(1998 年)
领队:Richard Nowakowski (Dalhousie University)
副领队:Naoki Sato (University of Toronto)
团体总分第 20 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Adrian Chan	7	7	3	7	7	0	31	29	金牌
Mihaela Enachescu	7	3	3	7	7	3	30	38	银牌
Adrian Tang	5	0	2	1	7	0	15	183	铜牌
Jimmy Chui	3	0	1	7	3	0	14	194	铜牌
Yin (Jessie) Lei	2	0	1	7	3	0	13	206	荣誉奖

Adrian Birka	2	1	2	5	0	0	10	242

第 40 届 IMO(1999 年)
领队:Edward Barbeau (University of Toronto)
副领队:Arthur Baragar (University of Nevada-Las Vegas)
团体总分第 31 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
David Arthur	7	1	2	7	0	1	18	109	铜牌
David Pritchard	7	1	2	2	0	5	17	119	铜牌
Jimmy Chui	7	3	2	2	0	2	16	129	铜牌
Yin (Jessie) Lei	4	0	1	2	1	1	9	270	
David Nicholson	4	0	2	1	0	1	8	292	
James Lee	2	1	0	2	0	1	6	344	

第 41 届 IMO(2000 年)
领队:Andrew Liu (University of Alberta)
副领队:Christopher Small (University of Waterloo)
团体总分第 17 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
David Arthur	7	7	7	7	7	3	38	7	金牌
Daniel Brox	7	7	0	7	7	0	28	45	银牌
David Pritchard	3	7	0	6	7	0	23	79	银牌
Keon Choi	7	0	2	3	0	0	12	204	铜牌
Denise Cheung	7	0	0	2	0	0	9	260	荣誉奖
David Goodman	0	2	0	0	0	0	2	416	

第 42 届 IMO(2001 年)
领队:Christopher Small (University of Waterloo)

副领队:Dorette Pronk (Dalhousie University)
团体总分第 24 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Daniel Brox	7	7	7	7	2	6	36	10	金牌
Paul Cheng	7	0	0	6	2	0	15	164	铜牌
Nima Kamoosi	7	0	0	1	5	2	15	164	铜牌
Liang Hong	7	0	0	2	4	0	13	199	铜牌
Roger Mong	6	0	0	7	0	0	13	199	铜牌
Shu Niu	3	1	1	1	2	0	8	277	

第 43 届 IMO(2002 年)
领队:Arthur Baragar (University of Nevada)
副领队:Naoki Sato (University of Toronto)
团体总分第 12 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Roger Mong	7	6	7	7	7	0	34	12	金牌
Olena Bormashenko	7	6	0	7	6	0	26	64	银牌
Alexander Fink	7	7	1	7	1	1	24	86	银牌
Tianyi (David) Han	2	6	1	7	6	1	23	99	银牌
Robert Barrington Leigh	7	0	1	7	7	0	22	113	铜牌
Ralph Furmaniak	0	0	1	7	2	3	13	233	荣誉奖

第 44 届 IMO(2003 年)
领队:Andrew Liu (University of Alberta)
副领队:Richard Hoshino (Dalhousie University)
团体总分第 12 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Olena Bormashenko	7	3	7	7	7	0	31	23	金牌
Jacob Tsimerman	7	7	7	7	1	1	30	26	金牌
Robert Barrington Leigh	7	3	0	7	1	0	18	107	铜牌
Tianyi (David) Han	1	7	0	7	1	0	16	138	铜牌
Oleg Ivrii	5	3	0	7	1	0	16	138	铜牌
János Kramár	2	3	0	1	1	1	8	292	

第 45 届 IMO(2004 年)
领队:Christopher Small (University of Waterloo)
副领队:Edward Wang (Wilfrid Laurier University)
团体总分第 21 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Jacob Tsimerman	7	7	7	7	7	7	42	1	金牌
Peng Shi	6	4	3	7	2	0	22	143	铜牌
János Kramár	6	6	2	7	0	1	22	143	铜牌
Yufei Zhao	6	6	1	3	1	1	18	200	铜牌
Oleg Ivrii	3	1	2	7	1	1	15	244	荣誉奖
Dong Uk (David) Rhee	7	1	3	2	0	0	13	272	荣誉奖

第 46 届 IMO(2005 年)
领队:Felix Recio (University of Toronto)
副领队:Dorette Pronk (Dalhousie University)
团体总分第 19 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Yufei Zhao	5	7	7	7	7	2	35	35	金牌
Yang (Richard) Peng	7	7	0	7	7	0	28	72	银牌

Peng Shi	2	7	2	6	6	2	25	100	银牌
Elyot Jameson Lester Grant	7	7	0	1	0	5	20	139	铜牌
Dong Uk (David) Rhee	7	2	0	7	0	2	18	156	铜牌
Lin Fei	3	1	0	1	0	1	6	328	

第 47 届 IMO(2006 年)
领队:Robert Morewood (Crofton House School)
副领队:Naoki Sato (AoPS Incorporated)
团体总分第 15 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Farzin Barekat	7	4	6	7	0	0	24	52	银牌
Yufei Zhao	7	7	1	7	1	0	23	60	银牌
Viktoriya Krakovna	7	7	0	7	1	0	22	76	银牌
Dong Uk (David) Rhee	7	4	0	7	1	1	20	109	银牌
Peng Shi	7	4	0	7	1	0	19	117	银牌
Yang (Richard) Peng	7	1	0	6	1	0	15	189	铜牌

第 48 届 IMO(2007 年)
领队:Bill Sands (University of Calgary)
副领队:Adrian Tang (University of Calgary)
团体总分第 27 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Alexander Remorov	7	7	0	7	1	0	22	93	银牌
Yan Li	5	7	0	7	1	0	20	123	铜牌
Kent Wai Kit Huynh	7	4	0	7	1	0	19	133	铜牌
Steven Neil Karp	7	2	0	7	1	0	17	161	铜牌
Chengyue (Jarno) Sun	3	1	0	7	0	0	11	293	荣誉奖

Jonathan Timur Schneider	3	0	0	6	0	0	9	344

第 49 届 IMO(2008 年)
领队:Felix Recio(University of Toronto)
副领队:Yufei Zhao
团体总分第 22 名

	题 1	题 2	题 3	题 4	题 5	题 6	总分	名次	奖别
Jonathan Schneider	7	7	0	7	7	0	28	64	银牌
Yan Li	7	7	1	4	7	0	26	78	银牌
Xiaolin Shi	7	5	0	7	2	0	21	148	铜牌
Chen Sun	7	1	0	6	7	0	21	148	铜牌
Alexander Remorov	7	5	0	7	1	0	20	159	铜牌
Chengyue (Jarno) Sun	7	4	0	7	1	0	19	170	铜牌

参考文献

[1] 单墫等.数学奥林匹克竞赛题解精编.南京:南京大学出版社,1991.

[2] 胡大同,陶晓永.第31届国际数学奥林匹克预选题.北京:北京大学出版社,1991.

[3] 刘鸿坤等.国内外数学竞赛试题汇编.上海:上海科学技术出版社,1993.

[4] 数学奥林匹克题库编译小组.加拿大中学生数学竞赛题解.天津:新蕾出版社,1992.

[5] 黄宣国.数学奥林匹克大集1994.上海:上海教育出版社,1997.

[6] 中国数学奥林匹克委员会.世界数学奥林匹克解题大辞典.石家庄:河北少年儿童出版社,2003.

[7] 李红,王卫华.第36届加拿大数学奥林匹克(CMO).数理天地(高中版),2004(10).

[8] 李潜.第37届加拿大数学奥林匹克(2005).数学竞赛之窗(高中),2005(6).

[9] 刘飞.第40届加拿大数学奥林匹克试题解答.数学竞赛之窗(高中),2008(3).

[10] 许德刚.第38届加拿大数学奥林匹克试题解答.数学竞赛之窗(高中),2008(1).

[11] 童金玉.1996年加拿大数学奥林匹克试题及解答.数学通讯,1997(5).

[12] 周维发.1997年加拿大数学奥林匹克问题及解答.数学通讯,1998(9).

[13] 范端喜.2000年加拿大数学奥林匹克竞赛试题及解答.数学通讯,2000(23).

[14] 费振鹏.2003年加拿大数学奥林匹克试题及解答.数理天地(高中版),2003(10).

★ 加拿大数学奥林匹克题解

★ 美国数学奥林匹克题解

★ 巴尔干地区数学奥林匹克题解

★ 英国数学奥林匹克题解

★ 俄罗斯数学奥林匹克题解

★ 中国数学奥林匹克国家队选拔考试题解

★ 国际数学奥林匹克预选题解



ISBN 978-7-308-07235-9

9 787308 072359 >

定价：16.00元